SISTEMAS P-FUZZY E APLICAÇÕES

Laécio C. Barros
Universidade Estadual de Campinas
laeciocb@ime.unicamp.br

Vinícius Francisco Wasques
Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais
vinicius.wasques@ilum.cnpem.br

Daniel E. Sánchez
Universidade Austral do Chile
danielsanchez@uach.cl

Estevão Esmi
Universidade Estadual de Campinas
eelaureano@ime.unicamp.br

Resumo

Neste curso apresentaremos uma metodologia baseada em regras fuzzy, acoplada a métodos numéricos para simular um sistema evolutivo discreto ou contínuo. Essa metodologia é chama p-fuzzy. Ao optarmos por um sistema evolutivo em tempo contínuo, o sistema p-fuzzy reproduz a solução de um problema de valor inicial, dado por uma equação diferencial clássica. Contudo, em sistemas p-fuzzy, o campo de direções não é dado explicitamente por uma função como no caso clássico e sim, por um sistema baseado em regras fuzzy. A denominação "p-fuzzy" vem do fato de conhecermos parcialmente o campo de direções, o qual é modelado por uma coleção de regras fuzzy, de acordo com o especialista do fenômeno modelado. É possível provar que quanto mais refinado for essa coleção de regras, mais próximo do campo teórico ela se torna. Veremos então, sistemas baseados em regras fuzzy, modelo de Mamdani, métodos de defuzzificação e, por fim,

aplicações em modelos de dinâmica populacional, engenharia, economia, e entre outros.

Palavras-chave: Base de regras fuzzy, Defuzzificação, Inferência de Mamdani, Inferência de Takagi-Sugeno, Sistemas Fuzzy.

Público-alvo. Nível graduação.

Pré-requisitos. Cálculo diferencial e integral e conceitos de números fuzzy.

1 Introdução

A teoria de conjuntos fuzzy foi introduzida em 1965 por Lofti A. Zadeh [19]. O objetivo dessa teoria é tratar matematicamente e computacionalmente incertezas inerentes aos fenômenos da natureza. Por essa teoria foi estabelecido que elementos podem pertencer a determinados conjuntos, com níveis de pertinência que variam de 0 a 1, sendo que 1 significa total pertinência e 0 significa a não pertinência.

Esse minicurso utilizará conceitos na área de lógica fuzzy, que surgem através da modelagem de variáveis linguísticas como "em torno de" e "aproximadamente", de modo a relaxar a propriedade atribuída a um determinado objeto. Por exemplo, não há dificuldades em verificar que o conjunto dos números reais que são maiores que 0 e menores ou iguais que 1 é determinado pelo intervalo $(0, 1]$. Por outro lado, a tarefa de determinar os elementos que são "próximos" de 0 não é simples, depende do contexto e do modelador.

Na literatura o termo "lógica fuzzy" é usado de duas formas diferentes: na teoria conjuntista a fim de manipular informações inexatas, através de uma teoria de conjunto fuzzy geral; e lógica no sentido de "cálculo proposicional", de modo a estender a lógica clássica [1, 14].

A formulação matemática fuzzy também se diferencia da probabilidade, pois, enquanto a estatística lida com incertezas antes dos eventos, a matemática fuzzy possui incertezas mesmo após o evento. Por exemplo, o lançamento de uma moeda possui incerteza antes do evento, mas após o lançamento não há incerteza. Enquanto que em um problema epidemiológico em que se tem a incerteza sobre a quantidade de indivíduos infectados em um instante de tempo t, ainda haverá incerteza no instante $t + 1$.

O foco do minicurso será modelar sistemas de equações diferenciais, através de sistemas parcialmente fuzzy (sistemas p-fuzzy) [18]. Tais sistemas produzem "trajetórias" que aproximam trajetórias do sistema dinâmicos clássico cujo campo é determinado por uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

O objetivo é aproximar a função f por um controlador fuzzy, isto é, $f(x) \simeq D(I(F(x)))$. Tais sistemas se apresentam como Problemas de Valores Iniciais (PVIs) discretos

$$(I) = \begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \approx \quad (II) = \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = D(I(F(\tilde{x}_k))) \\ \tilde{x}(0) = x_0 \end{cases}$$

A solução do sistema (I), embora possa existir, não podemos usar métodos clássicos de equações diferenciais uma vez que o campo f é parcialmente conhecido. Esse conhecimento parcial é descrito por um sistema baseado em regras fuzzy [1]. Por outro lado, o campo do sistema (II) é dado pela função $D(I(F((\tilde{x}))))$.

As estimativas $\tilde{x}_n$ serão obtidas por meio de métodos numéricos para soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O), como por exemplo o de Euler [3]

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + hD(I(F(\tilde{x}_n))),$$

onde h é o passo.

Embora seu grande poder de aplicação seja na indústria de controle e automação, nós temos utilizado essa teoria voltada para fenômenos biológicos tais como diagnóstico médico, estratégias no controle de pragas, previsão de incêndio florestal, modelagem de propagação de doenças além de aspectos matemáticos puramente teórico, como equações diferenciais. Aqui, essa abordagem será aplicada em alguns modelos populacionais [16], economia [15] e química [17] a fim de ilustrar as vantagens de se considerar aproximações de soluções via sistemas p-fuzzy.

2 Preliminares

Todo conjunto clássico pode ser definido em termos de uma função denominada função característica, ou também chamada de função indicadora. Isto é, dado um subconjunto A de um universo X, a função característica de A é definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in A \\ 0, se\ x \notin A \end{cases} .$$

Por exemplo, seja $a \in \mathbb{R}$. Então sua função característica é dada por $\chi_{\{a\}}(x) = 1$, se $x = a$ ou $\chi_{\{a\}}(x) = 0$, se $x \neq a$. A Figura 1 ilustra a função característica $\chi_{\{a\}}$.

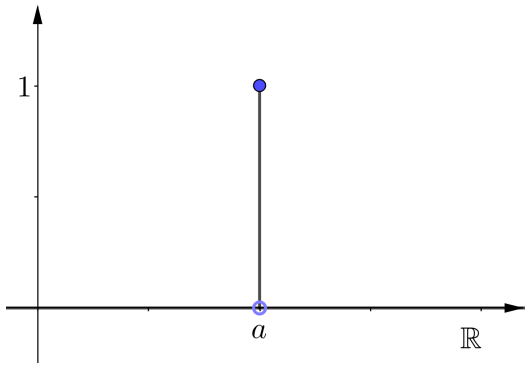


Figura 1: Representação gráfica da função característica $\chi_{\{a\}}$, sendo $a \in \mathbb{R}$.

Um subcojunto fuzzy é determinado a partir da extensão do contradominio da função característica, conforme a definição dada a seguir.

Definição 1 (Subconjunto fuzzy)**.** *Seja X um conjunto universo. O subconjunto fuzzy A de X é caracterizado por sua função de pertinência $\varphi_A : U \to [0, 1]$.*

A função de pertinência deve ser entendida da seguinte forma, os valores que $\varphi_A(x)$ assume em $[0, 1]$, definem o grau de pertinência que o elemento x satisfaz as propriedades estabelecidas pelo conjunto A, de modo que quanto mais próximo de 1, for o valor de $\varphi_A(x)$ maior é a pertinência em A. Quanto mais próximo de 0 for o valor de $\varphi_A(x)$, menor é a pertinência do elemento x em A [1].

Veja que um conjunto clássico A qualquer é, em particular, um conjunto fuzzy. Para isso, bastar tomar $\varphi_A \equiv \chi_A$.

Exemplo 1. Seja F um subconjunto de $\mathbb{N}$ dado por $F = \{n \in \mathbb{N} : \text{n é pequeno}\}$. Se a propriedade "pequeno" for explicitamente definida, o conjunto F se torna um conjunto clássico, podendo ser caracterizado por sua função indicadora. Se os números abaixo de 4 forem considerados pequenos, então $F = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Nesse caso, $\varphi_F(0) = \varphi_F(1) = \ldots = \varphi_F(4) = 1$ e $\varphi_F(5) = \varphi_F(6) = \ldots = 0$.

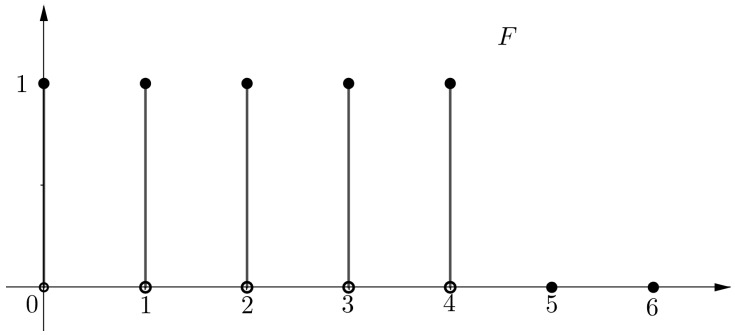


Figura 2: Representação gráfica do conjunto clássico F.

Apesar do exemplo acima descrever o conjunto dos números naturais que são pequenos, o termo "pequeno" é subjetivo e depende de vários fatores, como por exemplo a interpretação do modelador.

Exemplo 2. Seja F um subconjunto de $\mathbb{N}$ dado por $F = \{n \in \mathbb{N} : \text{n é pequeno}\}$. Considere então a seguinte função de pertinência

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{5}, & \text{se x } \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Através da função de pertinência φ_F os números $0, 1, 2, 3, 4$ são considerados pequenos, mas com diferentes graus de pertinência. Isto é, $\varphi_F(0) = 1$, $\varphi_F(1) = 0.8$, $\varphi_F(2) = 0.6$, $\varphi_F(3) = 0.4$ e $\varphi_F(4) = 0.2$. Portanto, além de indicar quais elementos possuem a propriedade estabelecida pelo conjunto F, tem-se também um ranqueamento sobre o grau de pertinência, por exemplo, o elemento 2 pertence ao conjunto F com um grau de pertinência maior que o elemento 4.

No último exemplo é possível perceber que a lógica fuzzy inclui não somente os números, mas também adjetivos ligados a eles sendo possível ponderar o quão determinado elemento atende certa propriedade.

Para o *caso clássico* as seguintes operações entre conjuntos são definidas:

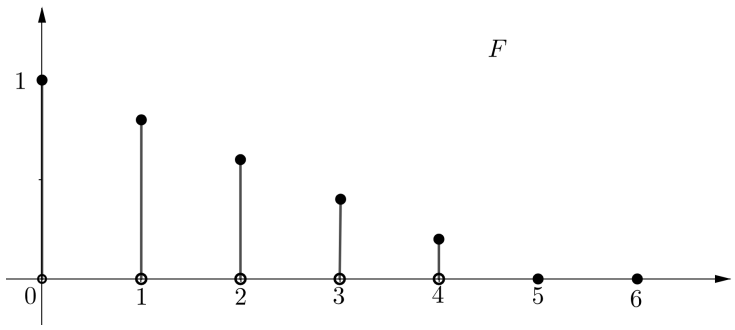


Figura 3: Representação gráfica do conjunto fuzzy F.

1. **União:** A união $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$ é definida através da sua função indicadora

$$\chi_{A\cup B}(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in A\ ou\ x \in B \\ 0, se\ x \notin A\ e\ x \notin B \end{cases},$$

que por sua vez pode ser reescrita como

$$\chi_{A\cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\};$$

2. **Intersecção:** A intersecção $A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$ é definida através da sua função indicadora

$$\chi_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in A\ e\ x \in B \\ 0, se\ x \notin A\ ou\ x \notin B \end{cases},$$

que por sua vez pode ser reescrita como

$$\chi_{A\cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\};$$

3. **Complemento(A^c ou A'):** O conjunto complementar $A' = \{x \in U : x \notin A\}$ é definido por sua função indicadora

$$\chi_{A'}(x) = \begin{cases} 1, se\ x \notin A \\ 0, se\ x \in A \end{cases},$$

que pode ser reescrita em termos da função de pertinência de A, isto é,

$$\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Note que o conjunto universo U, tem como função de pertinência $\chi_U(x) = 1$, para todo $x \in U$ e o conjuto vazio, denotado por $\emptyset$, tem como função de pertinência $\chi_\emptyset(x) = 0$, para todo $x \in U$.

Para o *caso fuzzy* as operações anteriores são estendidas, sendo definifas a seguir. Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Então tem-se as seguintes operações entre conjuntos fuzzy [10].

1. **União:** Define-se a união entre conjuntos fuzzy pela função de pertinência
$$\varphi_{A\cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\},$$
2. **Intersecção:** Define-se a intersecção entre conjuntos fuzzy pela função de pertinência
$$\varphi_{A\cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\};$$
3. **Complemento:** Define-se o complementar A' de um conjunto fuzzy A pela função de pertinência
$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x).$$

Exemplo 3. Considere os seguintes conjuntos $A = \{$pessoas de estatura alta$\}$, $B = \{$pessoas de estatura média$\}$ e $C = \{$pessoas de estatura baixa$\}$. No sentido clássico pode-se considerar que uma pessoa com mais de $1,80m$ de altura é alta, enquanto que na faixa de $1,7m$ a $1,79m$ a pessoa é considerada de estatura média e abaixo de $1,69m$ a pessoa é baixa. Tem-se então as seguintes representações gráficas da classificação de altura das pessoas.

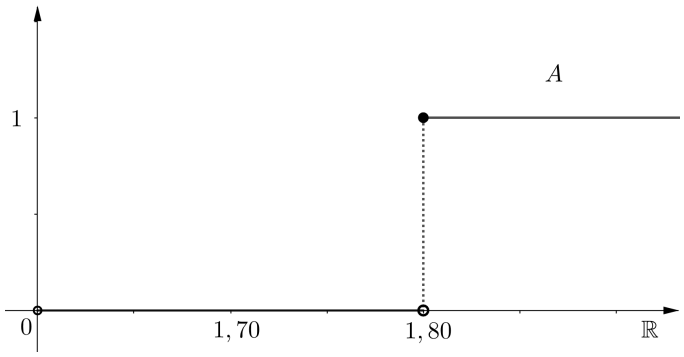


Figura 4: Representação gráfica do conjunto fuzzy A das pessoas altas.

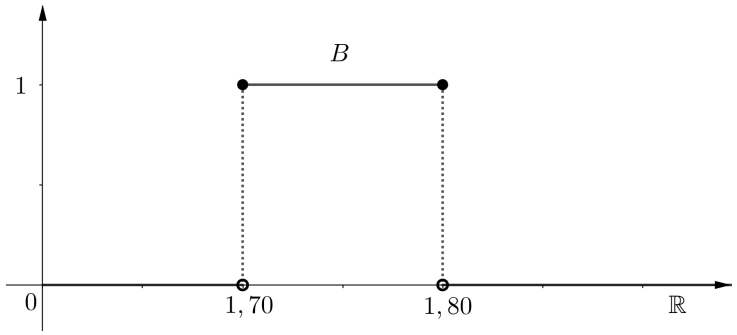


Figura 5: Representação gráfica do conjunto fuzzy B das pessoas médias.

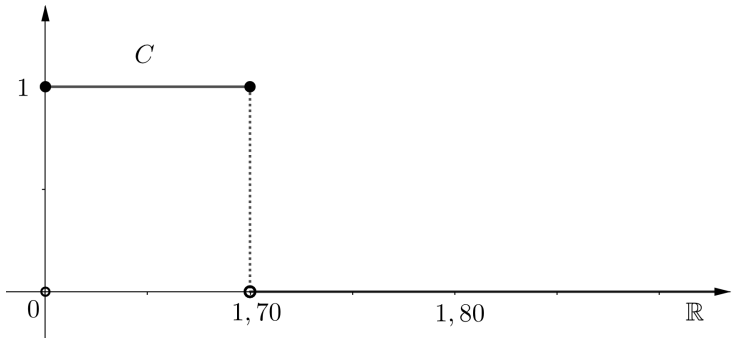


Figura 6: Representação gráfica do conjunto fuzzy C das pessoas baixas.

Perceba que a transição entre um conjunto e o outro é abrupta, isto é, uma pessoa com 1,81m é considerada alta, enquanto que por uma diferença de 0,02m uma pessoa com estatura 1,79 é considerada de tamanho médio. Pode-se então propor um outro tipo de classificação por meio de conjuntos fuzzy, conforme a Figura 7.

As funções de pertinência de tais conjuntos são dadas por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-1{,}70}{0{,}1}, & se\ x \in [1,70\ ,\ 1,80] \\ 0, & se\ x \leq 1,70 \\ 1, & se\ x \geq 1,80 \end{cases},$$

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} \frac{x-1{,}60}{0{,}1}, & se\ x \in [1,60\ ,\ 1,70] \\ \frac{1{,}80-x}{0{,}1}, & se\ x \in [1,70\ ,\ 1,80] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

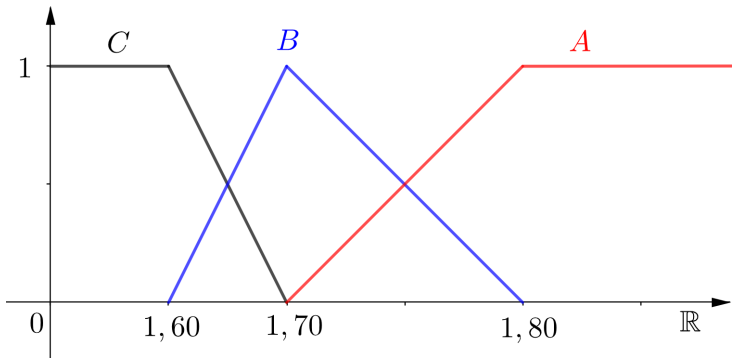


Figura 7: Representação gráfica dos conjuntos fuzzy A, B e C das estaturas das pessoas. O conjunto fuzzy preto representa o conjunto das pessoas baixas, o conjunto fuzzy azul representa o conjunto das pessoas médias e o conjunto fuzzy em vermelho representa o conjunto fuzzy das pessoas altas.

$$\varphi_C(x) = \begin{cases} \frac{1,70-x}{0,1}, & se\ x \in [1,60\ ,\ 1,70] \\ 0, & se\ x \geq 1,70 \\ 1, & se\ x \leq 1,60 \end{cases} .$$

É interessante notar no exemplo anterior que as transições entre as alturas se tornou mais suave. Além disso, uma pessoa com certa estatura pode pertencer a dois conjuntos simultaneamente. Por exemplo uma pessoa com $1,77m$ pertence ao conjunto das pessoas médias com grau $0,3$, e também, pertence ao conjunto das pessoas altas com grau $0,7$.

Observe que a classificação de alturas depende de diversos fatores, como por exemplo gênero e a região em que a pessoa vive. A partir da média de altura da população, pode ser feita uma classificação mais adequada, por exemplo, os homens chilenos tem em média uma estatura de $1,71m$, os homens brasileiros tem em média uma estatura de $1,73m$ e os homens alemães tem em média uma estatura de $1,81m$.

Uma subclasse dos conjuntos fuzzy muito utilizada em modelagem é a chamada subclasse dos números fuzzy [5]. Os números fuzzy estendem o conceito de número real, e portanto, podem ser utilizados na etapa de fuzzificação.

Um subconjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy se for um subconjunto fuzzy de $U = \mathbb{R}$, cujos α-níveis definidos por $[A]^\alpha = \{u \in \mathbb{R} : \varphi_A(u) \geq \alpha\}$ são intervalos não vazios, limitados e fechados, para todo $\alpha \in (0,1]$, e também, possui suporte $supp(A) = \{u \in \mathbb{R} : \varphi_A(u) > 0\}$ limitado de tal forma que

$[A]^0 = \overline{supp(A)}$.

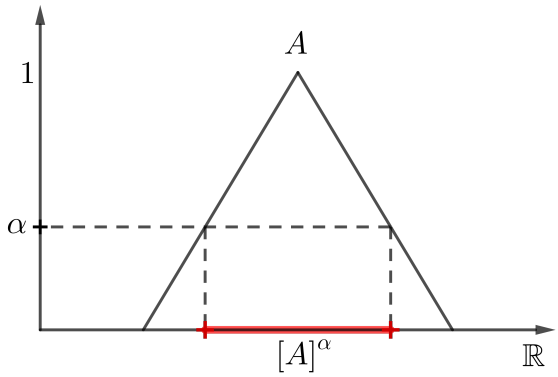


Figura 8: Representação gráfica de um número fuzzy e seu α-nível $[A]^\alpha$

Existem diversos tipos de números fuzzy, dentre eles:

- Número fuzzy triangular que é denotado por $A = (a; u; b)$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a < x \leq u \\ 1, & \text{se } x = u \\ \frac{b-x}{b-u}, & \text{se } u \leq x < b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

  Para o caso triangular, tem-se $[A]^\alpha = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b]$.

- Número fuzzy trapezoidal que é denotado por $A = (a; b; c; d)$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x \leq b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c \leq x < d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

  Para o caso trapezoidal, tem-se $[A]^\alpha = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d]$.

- Número fuzzy sino

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} e^{\frac{-(x-u)^2}{a^2}}, & \text{se } x \in [u-\delta, u+\delta] \\ 0, & \text{se } x \notin [u-\delta, u+\delta] \end{cases},$$

cujos α-níveis são dados por

$$[A]^{\alpha} = \begin{cases} \left[u - \sqrt{ln(\frac{1}{\alpha^a})}, u + \sqrt{ln(\frac{1}{\alpha^a})}\right], & \text{se } \alpha \geq \overline{\alpha} \\ [u - \delta, u + \delta], & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}.$$

A seguir a noção de relação fuzzy é introduzida [2].

Definição 2. *Sejam os universos $U_1, U_2, ..., U_n$. Uma relação fuzzy R é um subconjunto fuzzy de $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, cuja função de pertinência é dada por $\varphi_R : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \to [0, 1]$.*

O símbolo $\varphi_R(u_1, u_2, ..., u_n)$ representa o grau com que $u_1, u_2, ..., u_n$ estão relacionados segundo a relação *R*. Um exemplo de relação fuzzy em que $A_1 \subset U_1, A_2 \subset U_2, ..., A_n \subset U_n$ são subconjuntos fuzzy, é o produto cartesiano.

O produto carteasiano dado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}$ é um subconjunto fuzzy cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A_1 \times \ldots \times A_n}(u_1, u_2, ..., u_n) = \varphi_{A_1}(u_1) \wedge ... \wedge \varphi_{A_n}(u_n),$$

em que $\wedge$ denota o operador mínimo [9].

Em particular a relação binária fuzzy entre os universos U e V, é uma relação fuzzy R cuja função de pertinência é dada por $\varphi_R : U \times V \to [0, 1]$. Por exemplo, se A é subconjunto fuzzy de U e B é subconjunto fuzzy de V, o produto cartesiano fuzzy $A \times B$, tem função de pertinência dada por $\varphi_{A \times B} : U \times V \to [0, 1]$ em que [13]

$$\varphi_{A \times B}(u, v) = \varphi_A(u) \wedge \varphi_B(v) = \min\{\varphi_A(u), \varphi_B(v)\}.$$

Para o caso em que U e V são finitos, isto é, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ e $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, então $U \times V = \{(u_i, v_j) : i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n\}$ pode ser representado matricialmente por $R = [\varphi_R(u_i, v_j)] = [r_{ij}]$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \ldots & r_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \ldots & r_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \tag{1}$$

Exemplo 4. [1] Considere um determinado ecossistema U, no qual interagem as populações de *águias* (a), *cobras* (c), *insetos* (i), *lebres* (l) e *sapos* (s). Um estudo de interesse, entre os indivíduos destas populações, é o processo de predação, isto é, a relação do tipo *presa–predador*. Para isso é então considerada a *relação*

binária $\mathcal{R}$, com $\varphi_{\mathcal{R}}(x,y) = 0$ se y não é predador de x e $\varphi_R\,(x,y) \neq 0$ se y é predador de x, onde x e y representam indivíduos do conjunto U.

Se o interesse sobre a relação for apenas indicar quem é predador e quem é presa, então pode-se usar simplesmente a teoria clássica, e consequentemente, a relação $\mathcal{R}$ será uma relação binária clássica dada por

$$\varphi_{\mathcal{R}}(x,y) = \chi_{\mathcal{R}}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \text{ for predador de } x \\ 0, & \text{se } y \text{ não for predador de } x \end{cases}.$$

Para as populações a, c, i, l e s tem-se a seguinte relação de presa-predador

	p r e d a d o r					
	$\mathcal{R}$	**a**	**c**	**i**	**l**	**s**
p	**a**	0	0	0	0	0
r	**c**	1	1	0	0	0
e	**i**	1	0	1	0	1
s	**l**	1	1	0	0	0
a	**s**	1	1	0	0	1

,

que matricialmente pode ser descrito por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os valores 1 destacados na matriz indicam os pares que fazem parte da relação $\mathcal{R}$, isto é, a relação clássica $\mathcal{R}$ quem é predador de quem, de acordo com algum especialista.

Por outro lado, se além da relação presa-predador também existe um interesse em saber a preferência graduada de predação, então uma relação fuzzy pode ser utilizada. Neste caso, $\varphi_{\mathcal{R}}(x,y)$ indica o grau com que y tem preferência por x. Supondo que não haja diferença nos graus de predação dentro de cada espécie, uma possibilidade para $\varphi_{\mathcal{R}}(x,y)$ é dada de acordo com a relação abaixo

	p r e d a d o r					
	$\mathcal{R}$	**a**	**c**	**i**	**l**	**s**
p	**a**	0	0	0	0	0
r	**c**	1	0,2	0	0	0
e	**i**	0,1	0	0,3	0	1
s	**l**	1	0,8	0	0	0
a	**s**	0,2	1	0	0	0,1

,

e escrevendo na forma de matriz obtêm-se

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3 & 0 & 1 \\ 1 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 1 & 0 & 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $W = \{w_1, w_2, ..., w_p\}$. Seja *R* uma relação fuzzy de U para V e *S* uma relação de V para W. A relação T= *R* ∘ *S* de U por W ($U \times W$) é definida por

$$\varphi_{R \circ S}(u_i, w_j) = \max_{1 \leq k \leq n} (\min\{\varphi_R(u_i, v_k), \varphi_S(v_k, w_j)\}).$$

Pode-se obter a composição matricialmente operando as matrizes de maneira conveniente, colocando $r_{ij} = \varphi_R(u_i, v_j)$, $s_{ij} = \varphi_S(v_i, w_j)$ e $t_{ij} = \varphi_{R \circ S}(u_i, w_j)$, isto é,

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots \\ \vdots & \ddots & \\ t_{m1} & \ldots & t_{mp} \end{bmatrix}_{mxp} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots \\ \vdots & \ddots & \\ r_{m1} & \ldots & r_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \circ \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots \\ \vdots & \ddots & \\ s_{n1} & \ldots & s_{np} \end{bmatrix}_{nxp}, \quad (2)$$

em que $t_{ij} = \max_{1 \leq k \leq m} (\min\{\varphi_R(u_i, v_k), \varphi_S(v_k, w_j)\})$.

Observe que $T = R \circ S$ constitui caso análogo ao produto matricial, onde a multiplicação é trocada por mínimo e soma por máximo.

Exemplo 5. Sejam *R* e *S* as relações fuzzy dadas respectivamente por

$$R = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,9 \\ 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,7 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Então a relação fuzzy *T* obtida da composição $T = R \circ S$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,7 & 0,9 \\ 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,7 \\ 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

De um modo geral, a composição de relações fuzzy binárias é dada da seguinte forma. Sejam U, V e W conjuntos universos, R uma relação fuzzy de U para V e S outra relação de V para W. A relação $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}$ de $U \times W$ é definida por

$$\varphi_{R \circ S}(u, w) = \sup_{v \in V}(\min\{\varphi_R(u, v), \varphi_S(v, w)\}.$$

Definição 3 (Regra de composição de inferência)**.** *Sejam U e V dois conjuntos, $\mathcal{F}(U)$ e $\mathcal{F}(V)$ as classes dos subconjuntos fuzzy de U e V respectivamente, e $\mathcal{R}$ uma relação fuzzy binária sobre $U \times V$. A relação $\mathcal{R}$ define um funcional de $\mathcal{F}(U)$ em $\mathcal{F}(V)$ que, a cada elemento $A \in \mathcal{F}(U)$, faz corresponder o elemento $B \in \mathcal{F}(V)$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_B(y) = \varphi_{\mathcal{R}(A)}(y) = \sup_{x \in U}[\min(\varphi_{\mathcal{R}}(x, y), \varphi_A(x))]. \tag{5}$$

Essa composição é conhecida como regra de composição de inferência e será utilizada mais adiante nesse texto.

Uma **variável linguística** é uma variável cujo valor é dado qualitativamente por termos linguísticos (que estabelece um adjetivo da variável) e quantitativamente por uma função de pertinência (um conjunto fuzzy).

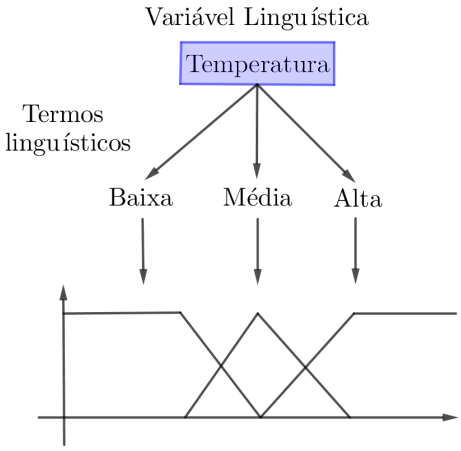


Figura 9: Variáveis linguísticas traduzidas por conjuntos fuzzy.

Um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) e, especificamente, Controladores fuzzy é caracterizado por quatro componentes essenciais [14]: um módulo de entrada (*fuzzyficação*), um módulo de base de regras, um módulo de inferência

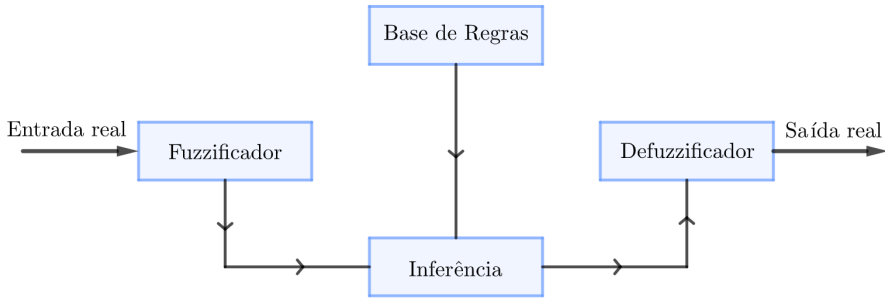


Figura 10: Diagrama de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF).

fuzzy e um módulo de saída (*defuzzyficação*). Esses módulos são representados através do diagrama dado na Figura 10.

- Módulo de fuzzificação: etapa em que as variáveis de entrada reais são "traduzidas" por números fuzzy;
- Regras fuzzy: são formadas por regras da forma "Se *entrada*, então *saída*". As variáveis de *entrada* também são chamadas de antecedentes e a *saída* de consequentes. Sendo cada antecedente e consequente traduzido por um conjunto fuzzy;
- Método de inferência fuzzy: os métodos estudados nesse minicurso são o de Mamdani e o de Takagi-Sugeno, apresentados adiante;
- Defuzzificação: constitui em representar um conjunto fuzzy através de um número real. Aqui será utilizado o centróide ou centro de massa.

A seguir introduziremos o método de inferência via Mamdani.

2.1 Método de inferência de Mamdani

Uma base de regras fuzzy é dada por um conjunto (uma tabela) de regras R_i da seguinte forma

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{11} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{1n}, \text{ então } y_1 \text{ é } B_{11} \text{ e } \ldots \text{ e } y_m \text{ é } B_{1m}. \\ R_2 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{21} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{2n}, \text{ então } y_1 \text{ é } B_{21} \text{ e } \ldots \text{ e } y_m \text{ é } B_{2m}. \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ R_p : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{p1} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{pn}, \text{ então } y_1 \text{ é } B_{p1} \text{ e } \ldots \text{ e } y_m \text{ é } B_{pm}. \end{cases}$$

em que x_k é a k-ésima variável de entrada, A_{ik} é o k-ésimo conjunto fuzzy "antecedente" da regra i, y_j é a j-ésima variável de saída e B_{ij} é o j-ésimo conjunto fuzzy "consequente" do índice i, para $i = 1, \ldots, p$, $k = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.

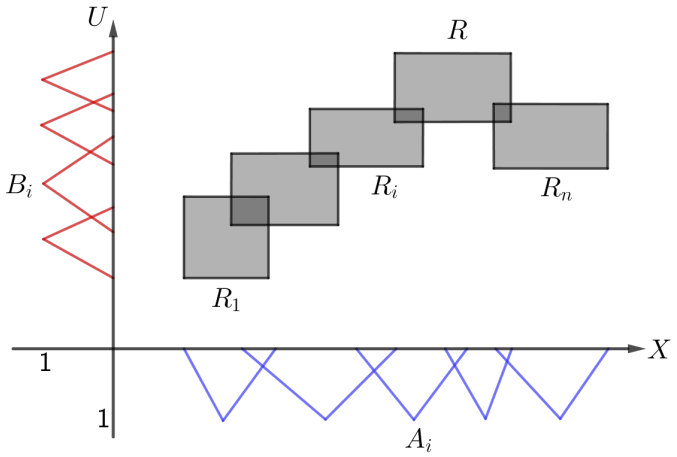


Figura 11: Regras do método de Mamdani.

Esse sistema de regras pode ser descrito através da relação fuzzy *M*, chamada de Mamdani, definida em $(X_1 \times \ldots \times X_n) \times (Y_1 \times \ldots \times Y_m)$, cuja função de pertinência é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_M(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= \varphi_{R_1}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \vee \\ &\quad \varphi_{R_2}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \vee \\ &\quad \vdots \\ &\quad \varphi_{R_p}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \varphi_{R_i}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= (\varphi_{A_{i1}}(x_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_{A_{in}}(x_n)) \wedge \\ &\quad (\varphi_{B_{i1}}(y_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_{B_{im}}(y_m)) \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \ldots, p$.

Em outras palavras, a relação fuzzy *M* nada mais é que a união dos produtos cartesianos fuzzy entre os antecedentes e os consequentes de cada regra.

Para um subconjunto fuzzy de entrada $A_1 \times \ldots \times A_n$ de $X_1 \times \ldots \times X_n$, o conjunto fuzzy de saída $B_1 \times \ldots \times B_m$ de $Y_1 \times \ldots \times Y_m$ é dado por $A \circ M = B$,

cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_B(u) = (\varphi_{A \circ M})(u) = \sup_x \{\varphi_A(x) \wedge \varphi_M(x, u)\}.$$

Exemplo 6. Considere a seguinte base de regras

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{11} \text{ e } x_2 \text{ é } A_{12}, \text{ então } y \text{ é } B_1 \\ R_2 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{21} \text{ e } x_2 \text{ é } A_{22}, \text{ então } y \text{ é } B_2 \end{cases} . \tag{6}$$

Após o processo de fuzzificação, considere os conjuntos fuzzy de entrada $A = A_1 \times A_2$. Assim, as funções de pertinência de cada relação fuzzy R_i são dadas por

$$\varphi_{R_1}(x_1, x_2, y) = \varphi_{A_{11}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{12}}(x_2) \wedge \varphi_{B_1}(y)$$

e

$$\varphi_{R_2}(x_1, x_2, y) = \varphi_{A_{21}}(x_1) \wedge \varphi_{A_{22}}(x_2) \wedge \varphi_{B_2}(y).$$

Esse processo pode ser ilustrado através da Figura 12.

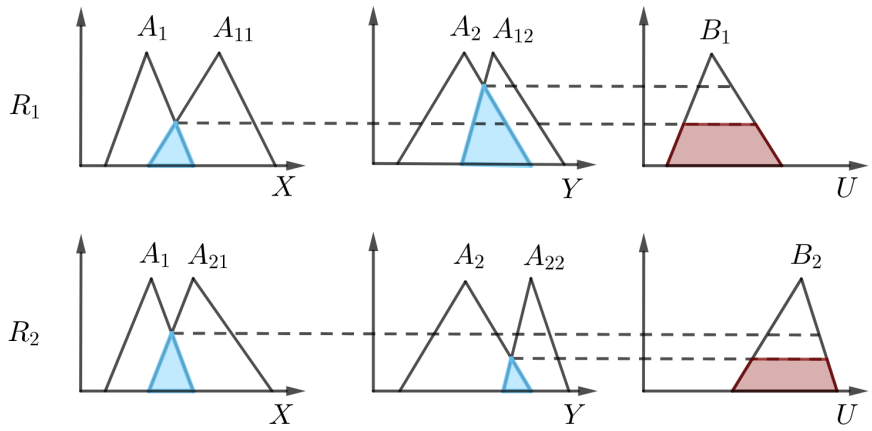


Figura 12: Representação gráfica das regras R_1 e R_2, associadas ao Sistema Baseado em Regras Fuzzy dado por (6).

Assim, o conjunto fuzzy de saída B é obtido através da função de pertinência

$$\varphi_B(y) = \sup_x \{\varphi_A(x) \wedge \varphi_M(x, y)\},$$

sendo $B = A \circ M$ e

$$\varphi_M(x, y) = \varphi_{R_1}(x_1, x_2, y) \vee \varphi_{R_2}(x_1, x_2, y).$$

Graficamente, essa etapa final pode ser vista através da Figura 13.

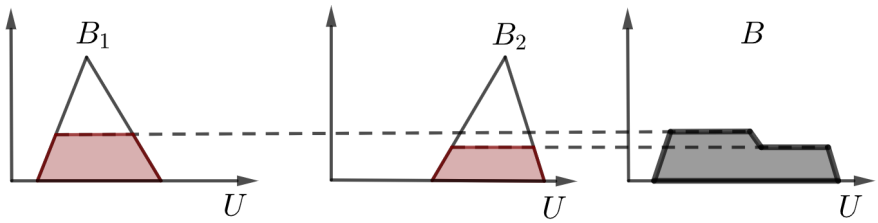


Figura 13: Conjunto fuzzy de saída obtido pelo Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) dado por (6).

Exemplo 7 (Vitalidade das Violetas)**.** Violeta é um tipo de flor muito apreciada pelos apaixonados pelas plantas. Para que tenha larga vida são necessários pequenos cuidados diários. Por exemplo:

- Ser exposta de meia a uma hora ao Sol pela manhã ou pela tarde (pois o Sol é menos forte nessas horas).
- Ser regada com aproximadamente 33 ml.

Assim, dados valores de quantidade de água (ml) e de quantidade de exposição ao Sol (em minutos), podemos modelar a "vitalidade das violetas".

Para essa modelagem temos então dois antecedentes **quantidade de água** e **tempo de exposição no Sol** e um consequente **vitalidade das violetas**. A Quantidade de **água** (ml), com domínio [0,65], representando os intervalos < 26, $22-42$ e > 38, com os termos linguísticos: *pequena*, *média* e *grande*, que podem ser vistos na Figura 14.

Já o tempo de exposição ao **Sol** (em minutos), com domínio [0,95], representando os intervalos < 35, $30 - 65$ e > 60, com os termos linguísticos: *pequeno*, *médio* e *grande*, podem ser vistos na Figura 15.

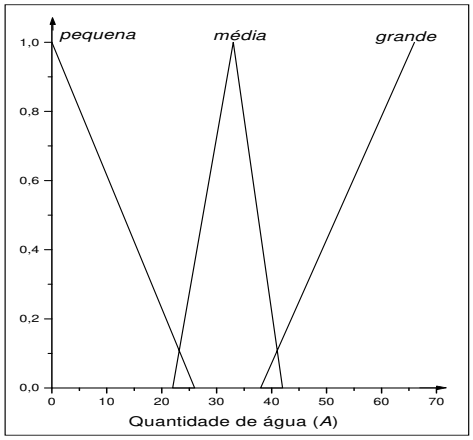


Figura 14: Antecedente quantidade de água (A)

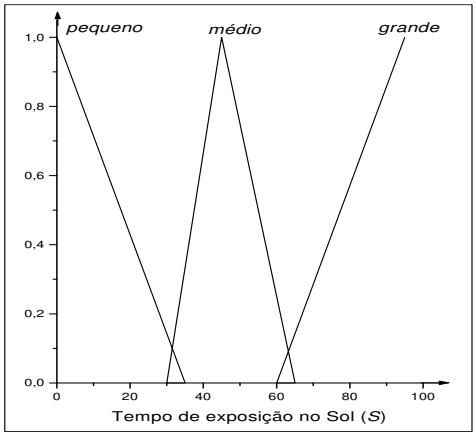


Figura 15: Antecedente exposição ao Sol (S)

Por fim, o domínio da variável de saída **vitalidade** da violeta é [0,1] representando os intervalos < 0.2, $0.1 - 0.9$ e > 0.8, com os termos linguísticos: *ruim*, *média* e *boa*, podem ser vistos na Figura 16.

A base de regras proposta para essa modelagem é dada na Tabela 1.

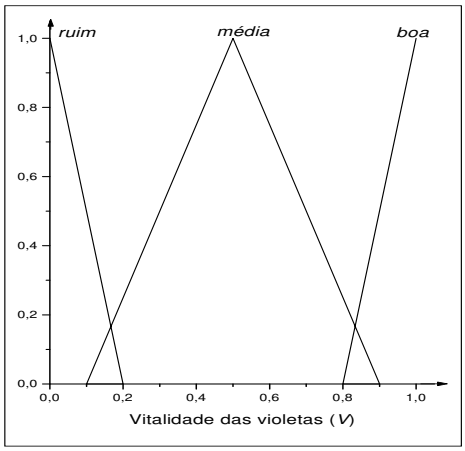


Figura 16: Consequente vitalidade das violetas (V)

Sol(S)/Água (A)	pequena	média	grande
pequeno	média	boa	ruim
médio	média	boa	ruim
grande	ruim	média	ruim

Tabela 1: Base de regras para o problema de vitalidade das violetas

A partir das informações estabelecidas pelo modelador, com quantidade de água 40 ml e tempo de exposição ao Sol de 60 min. o SBRF produz uma saída fuzzy, cujo valor obtido através da defuzzificação é dado por (aproximadamente) de 0.7. Este é o valor da vitalidade, numa escala de 0 a 1. É um valor interpretado como "**médio** (alto)" para a vitalidade da violeta.

Exemplo 8. (Grau de Risco de Obesidade) Como um médico faz o diagnóstico? A forma mais recomendada de avaliar a massa corporal em adultos é o IMC (índice de massa corporal), recomendado até mesmo pela Organização Mundial da Saúde. Este índice é calculado dividindo o peso do paciente em quilogramas (kg) pelo quadrado de sua altura em metros (m^2).

Na seguinte Tabela o diagnóstico do tipo de Obesidade e grau de risco associado pode ser classificado segundo o IMC obtido:

IMC (kg/m^2)	Grau de Risco	Tipo de obesidade
18 até 24,9	Saudável	Ausente
25 até 29,9	Moderado	com Sobrepeso (pré-obesidade)
30 até 34,9	Alto	Obesidade Grau I
35 até 39,9	Muito Alto	Obesidade Grau II
40 ou mais	Extremo	Obesidade Grau III ('mórbido')

Na tabela a seguir são classificados os pesos, superior e inferior (em kg), que um adulto, acima de 20 anos, deveria ter de acordo com sua altura (em cm):

Altura (cm)	Peso Inferior (kg)	Peso Superior (kg)
160	47	64
165	50	68
170	53	72
175	56	77
180	59	81
185	62	85

Assim, as **variáveis linguísticas** que podemos associar para este exemplo são:

- O **Peso** (kg), com domínio $[47, 81]$, considerando os intervalos $47 - 64$, $50 - 68$, $53 - 72$, $56 - 77$ e $59 - 81$, com os termos lingüísticos: *baixo*, *médio baixo*, *médio*, *médio alto* e *alto*, respectivamente.

- A **Altura** (cm), com domínio $[157, 183]$, considerando os intervalos $157 - 163$, $162 - 168$, $167 - 173$, $172 - 178$ e $177 - 183$, com os termos linguísticos: *baixo*, *médio baixa*, *médio*, *médio alta* e *alta*, respectivamente.

- O domínio da variável de saída **Grau de Risco** é o intervalo $[18, 35]$, considerando os termos linguísticos: *saudável*, *moderado* e *alto*.

Portanto, com base nas informações acima, uma base de regra pode ser construída da seguinte forma:

Altura (*A*) - Peso (*P*)	baixo	médio baixo	médio	médio alto	alto
baixa	saudável	moderado	moderado	moderado	alto
médio baixa	saudável	saudável	moderado	moderado	moderado
médio	saudável	saudável	saludable	moderado	moderado
médio alta	saudável	saudável	saudável	saudável	moderado
alta	saudável	saudável	saudável	saudável	saudável

Nesse sentido, é possível obter uma saída do sistema de inferência, por exemplo, com altura de 164 cm. e peso 59 kg., após a defuzificação encontramos um valor (aproximadamente) de 24, indicando que a pessoa é " **saudável** ".

A seguir o método de inferência fuzzy via Takagi-Sugeno é apresentado.

2.2 Método de inferência fuzzy de Tagaki-Sugeno

Diferentemente do método de Mamdani, o método de Takagi-Sugeno tem funções como consequentes no SBRF. Isto é, as regras são do tipo: "Se x é *alto*, então $y = ax + b$. De um modo geral, o SBRF via Tagaki-Sugeno é dado por

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{11} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{1n}, \text{ então } y_1 = g_1(x_1, x_2, ..., x_n). \\ R_2 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{21} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{2n}, \text{ então } y_2 = g_2(x_1, x_2, ..., x_n). \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ R_p : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{p1} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{pn}, \text{ então } y_p = g_p(x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases}$$

A saída obtida por esse sistema é fornecida da seguinte forma

$$y = \frac{\sum_{j=1}^{p} w_j . g_j(x_1, x_2, ..., x_n)}{\sum_{j=1}^{p} w_j}, \tag{7}$$

em que $w_j = \varphi_{A_{j1}}(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi_{A_{jn}}(x_n)$, para todo $j = 1, \ldots, p$.

Exemplo 9. Considere o seguinte SBRF dado pelo métod de Takagi-Sugeno.

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se } x \text{ é } A_1, \text{ então } y_1 = x + 2 \\ R_2 : \text{Se } x \text{ é } A_2, \text{ então } y_2 = 2x \end{cases},$$

para todo $x \in [0, 6]$, cujas funções de pertinência dos conjuntos fuzzy A_1 e A_2 são dados respectivamente por

$$\varphi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - \frac{1}{2}x, & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ 0, & \text{se } x \geq 4 \end{cases},$$

e

$$\varphi_{A_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1, & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{se } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}.$$

Nesse caso, a saída obtida é dada por

$$y = \frac{w_1 g_1(x) + w_2 g_2(x)}{w_1 + w_2},$$

em que

$$w_1 = \varphi_{A_1}(x) \quad \text{e} \quad w_2 = \varphi_{A_2}(x).$$

Logo,

$$y = \varphi_{A_1}(x)(x + 2) + \varphi_{A_2}(x)(2x) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 8). \tag{8}$$

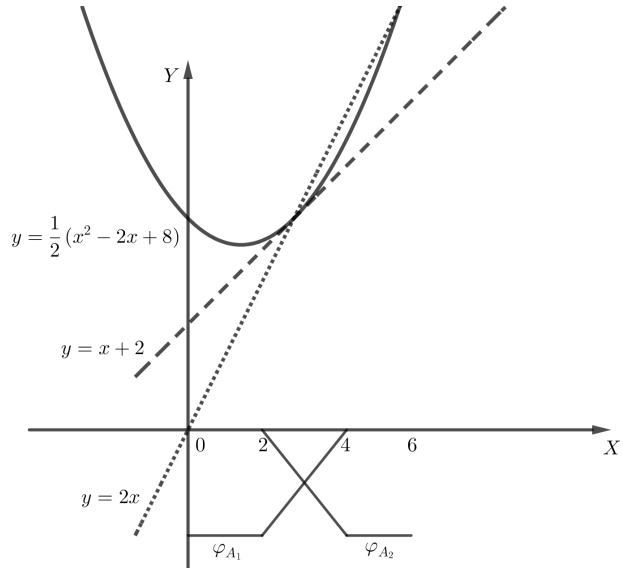


Figura 17: Representação gráfica da função de saída y dada em (8).

3 Sistemas p-Fuzzy

A nomenclatura Sistemas p-fuzzy significa sistemas parcialmente fuzzy, isto é, esse tipo de abordagem estuda problemas em que o campo de direções de uma equação diferencial, associada a um Problema de Valor Inicial ou de Contorno (PVI ou PVC), é conhecido apenas qualitativamente.

Este minicurso se dedica a estudar então problemas da seguinte forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases},$$

sendo que o campo de direções descrito por f é parcialmente conhecido e será descrito por uma base de regras fuzzy, consistente com o modelo a ser estudado.

A solução esperada (trajetória) é *crisp*, já que, em cada instante t, é um valor obtido posterior a um processo de defuzzificação. Formalmente, vamos estudar PVIs contínuos da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x), \\ x(a) = x_0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = SBRF_f(X), \\ X(a) = x_0, \end{cases} \tag{9}$$

sendo X a aproximação numérica da solução x.

A subjetividade suportada pelos sistemas p-fuzzy se refere à imprecisões quanto aos estados iniciais das variáveis e quanto aos parâmetros

Exemplo 10. Considere o modelo de crescimento populacional Malthusiano, dado pelo seguinte PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases},$$

com $\lambda > 0$.

É possível verificar que a solução analítica desse PVI é dada por uma função exponencial, isto é, $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$. No entanto, para isso é necessário conhecimentos de resoluções de equações diferenciais. Por outro lado, é possível estimar o comportamento dessa solução a partir de um sistema p-fuzzy, sem ter exatamente um conhecimento aprofundado sobre equações diferencias.

Este modelo considera que a cada instante de tempo t, a taxa de crescimento de uma população é diretamente proporcional à ela mesma. Sendo assim, é possível criar uma base de regras para estimar o campo de direções determinado pela função f e utilizar método numéricos clássicos, como por exemplo o método de Euler, para aproximar a solução $x(t)$.

Sendo assim, a base de regras criada aqui é para a taxa de variação por unidade de tempo, indicada por $\frac{dx}{dt}$, com base na população x. Portanto, x é o valor da variável de entrada, enquanto que $\frac{dx}{dt}$ é o valor da variável de saída.

Para isso, adotaremos apenas quatro regras para o SBRF

$$\begin{cases} R_1 : \text{Se a população } x \text{ for } \textbf{muito pouca}, \text{ então a variação } \frac{dx}{dt} \text{ é } \textbf{muito pouca.} \\ R_2 : \text{Se a população } x \text{ for } \textbf{pouca}, \text{ então a variação } \frac{dx}{dt} \text{ é } \textbf{pouca.} \\ R_3 : \text{Se a população } x \text{ for } \textbf{média}, \text{ então a variação } \frac{dx}{dt} \text{ é } \textbf{média.} \\ R_4 : \text{Se a população } x \text{ for } \textbf{muita}, \text{ então a variação } \frac{dx}{dt} \text{ é } \textbf{muita.} \end{cases}, \tag{10}$$

Nesse caso, as variáveis linguísticas são modeladas pelos conjuntos fuzzy dados nas Figuras 18 (antecedentes) e 19 (consequentes).

A estimativa da solução $x(t)$ será dada através do método clássico de Euler, isto é, o algoritmo é descrito por

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k),$$

com $0 \leq k \leq N - 1$, sendo N o número de partições que o intervalo de tempo é dividido e h o tamanho de seus subintervalos $[t_k, t_{k+1}]$ igualmente espaçados.

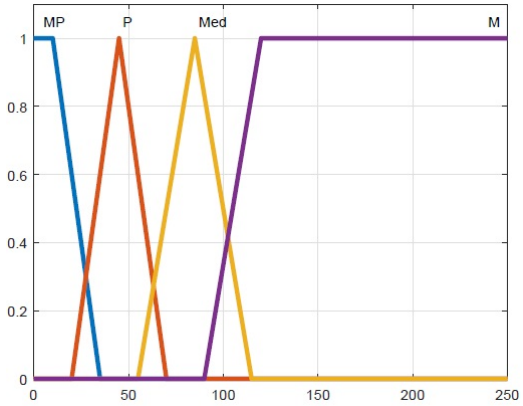


Figura 18: Conjuntos fuzzy para o antecedente população $x(t)$.

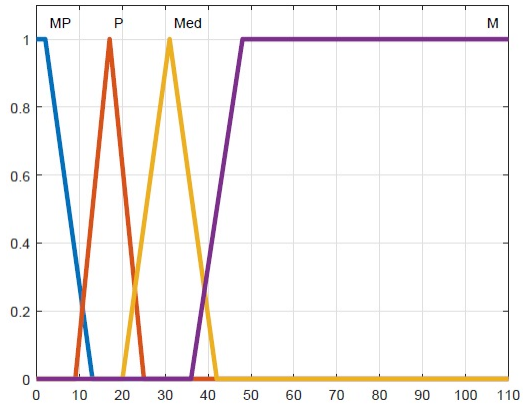


Figura 19: Conjuntos fuzzy para o consequente taxa de variação $\frac{dx}{dt}$.

No caso de um sistema p-fuzzy, o método é obtido da seguinte forma

$$x_{k+1} = x_k + hSBRF_f,$$

em que $SBRF_f$ representa a saída do SBRF, produzido pelo controlador fuzzy. Por exemplo, se $h = 0,1$ e $X_0 = 2$, temos que $SBRF_f(X_0) \approx 4,1062$ e assim

$$X_1 = X_0 + h \cdot SBRF_f(X_0) = 2 + 0,1 \cdot 4,1062 \approx 2,4106,$$

e o processo de iteração continua de modo similar para $X_2, X_3, \ldots, X_n$.

Com isso, a partir da base de regras dada em (10), obtem-se a seguinte solução aproximada dada na Figura 20.

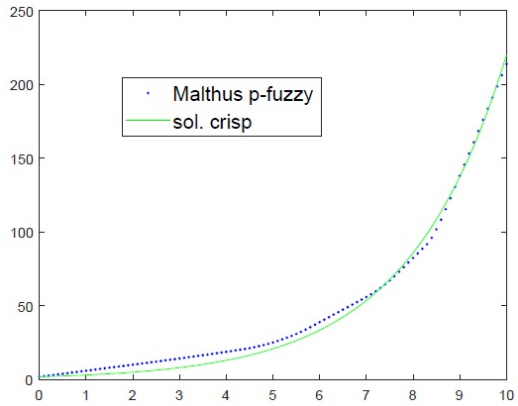


Figura 20: Solução do modelo de Malthus via sistema p-fuzzy dada pela linha pontilhada em azul. A solução exata do modelo de Malthus é dada pela linha em verde. Os parâmetros utilizados foram $h = 0,1$, $x_0 = 2$ e $\lambda = 0,47$.

A mesma técnica utilizada no exemplo anterior pode ser estendida para o caso n-dimensional. Por exemplo, considerando um PVI bidimensional dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = SBRF_f(X,Y), \\ \dfrac{dY}{dt} = SBRF_g(X,Y), \\ X(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \\ Y(a) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{11}$$

o método de Euler pode ser novamente utilizado, considerando como saída as **taxas específicas de variação**, obtendo as estimativas da seguinte forma:

$$X_{n+1} = X_n + h \cdot SBRF_f(X_n, Y_n)\,,$$

$$Y_{n+1} = Y_n + h \cdot SBRF_g(X_n, Y_n)\,,$$

onde h é o passo e $SBRF_f, SBRF_g$ são as aplicações (saídas) produzidas pelo controlador fuzzy.

É importante destacarmos algumas características de um sistema p-fuzzy contínuo, para esse minicurso:

1. Existem sistemas p-fuzzy **discretos** mas descrevemos “população - variação” em termos absolutos.

2. Em sistemas p-fuzzy contínuos descrevemos "população - taxa de variação" (ou "taxa específica de variação") em termos conducentes ao conceito de derivada.

3. Estudamos sistemas **autônomos** (campo de direção não depende do tempo).

4. Formalmente, a base de regras de um sistema p-fuzzy contínuo é semelhante de um discreto, mas deve ser "bem ordenada" (veja Definição 9.1 de [1]).

5. A metodologia de controladores fuzzy que utilizamos é a de Mamdani com defuzzificação dada pelo centro de massa (centroide).

6. Dependendo das regras, o campo f (que é a saída do controlador fuzzy) pode ter propriedades que garantam a **existência e unicidade** da solução para um PVI.

Uma grande utilidade de controladores fuzzy no estudo de **aproximação** está no fato de poder "substituir", com alguma credibilidade, um possível funcional (teórico) modelador de um determinado fenômeno (veja Figura 21). Em geral, cada uma das funções f_r^*, onde r é o número de regras da base, dadas por um sistema fuzzy, depende:

a) das funções de pertinência dos conjuntos fuzzy da base de regras;

b) do método de Inferência utilizado (Mamdani, Takagi-Sugeno, com outras t-normas e t-conormas, etc.);

c) do método de defuzzificação adotado (centroide, média ou centro de máximos, etc).

Em suma, existe uma sequencia de funções f_r^*, produzidas por sistemas fuzzy, que estão suficientemente próximas da função teórica f. E quanto maior o número de regras (maior r) mais próxima do valor teórico esperado será a saída do controlador.

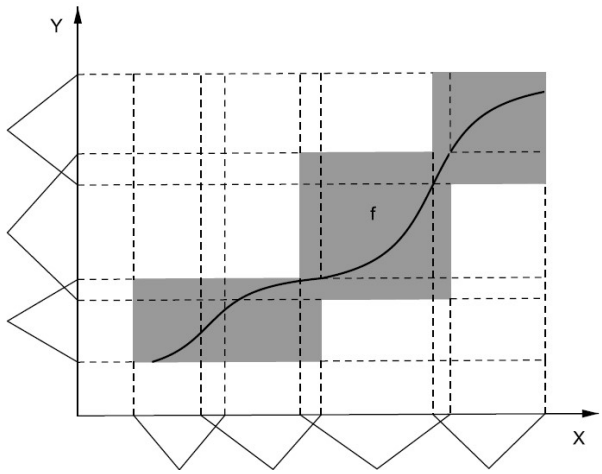


Figura 21: Regras fuzzy e função teórica f.

4 Aplicações

Neste capítulo vamos apresentar aplicações de sistemas p-fuzzy em modelos populacionais, reações químicas e econômico.

4.1 Modelos populacionais

4.1.1 Estudo do Modelo p-fuzzy de Verhulst

Primeiramente vamos abordar o modelo de crescimento populacional com inibição, como o de Verhulst. O modelo tradicional de Verhulst para crescimento populacional é regido pelo seguinte *PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt} & = & a\left(1-\dfrac{x}{k}\right) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}, \tag{12}$$

onde a é a razão de crescimento intrínsica e K é a capacidade suporte.

As soluções clássicas de (12), que representam as populações $x(t)$ em cada instante t, são dadas por

$$x(t) = \frac{K}{(\frac{K}{x_0}-1)e^{-at}+1}. \tag{13}$$

Logo,

$$\begin{cases} x \text{ é crescente se } x_0 < K \\ x \text{ é constante se } x_0 = K \\ x \text{ é decrescente se } x_0 > K \end{cases},$$

e tem a forma representada na Figura 22.

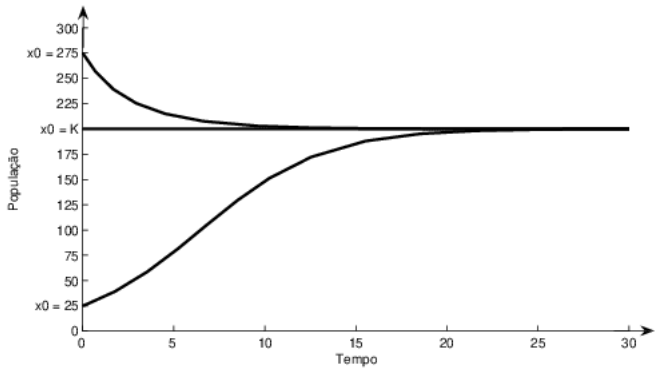


Figura 22: Trajetórias do modelo de Verhulst com $K = 200$ e $x_0 = 25$, 200 e 270.

Lembremos que no exemplo que estamos analisando, a função

$$g(x) = \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a\left(1 - \frac{x}{k}\right). \tag{14}$$

Entretanto, para adotar a nossa metodologia não precisamos conhecer explicitamente tal expressão. Aqui ela é apresentada apenas com a finalidade de comparar as propriedades qualitativas das trajetórias clássicas com as produzidas pelo sistema p-fuzzy contínuo.

Para traçarmos um paralelo nas formulações das regras com o modelo clássico, analisaremos

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a\left(1 - \frac{x}{k}\right) = f(x), \tag{15}$$

em que f é afim.

Note que a equação (15) está escrita em função da taxa de crescimento específico. Esta formulação facilita a elaboração das regras do sistema p-fuzzy. A "construção" das regras a partir da variação percentual por unidade de tempo pode, em alguns casos, parece ser mais intuitiva que a formulação a partir das variações absolutas.

Apenas para efeito de notação, denotaremos X para a população (entrada) e $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ (saída) para a taxa de crescimento relativa por unidade de tempo (ou taxa de crecimento específico).

Como a função f é afim e decrescente a Equação (15), temos que as regras para a variação específica deve ser "decrescente" também. Note que o suporte de B_i devem estar entre -1 e 1.

R_1 : **Se** (X) é "baixa" (A_1) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "alta positiva" (B_1)
R_2 : **Se** (X) é "média baixa" (A_2) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "alta positiva" $(B_2 = B_1)$
R_3 : **Se** (X) é "média" (A_3) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "média positiva" (B_3)
R_4 : **Se** (X) é "média alta" (A_4) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "média positiva" $(B_4 = B_3)$
R_5 : **Se** (X) é "alta" (A_5) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "baixa positiva" (B_5)
R_6 : **Se** (X) é "altíssima" (A_6) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "baixa negativa" (B_6)

Tabela 2: Regras para o modelo fuzzy contínuo.

As Figruas 23 e 24 ilustram os conjuntos fuzzy dos antecedentes e consequentes da Tabela 2.

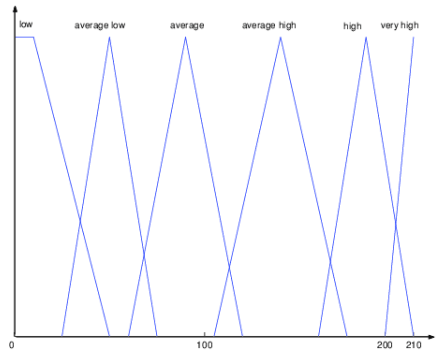


Figura 23: Funções de pertinência da população X.

Para efeito de ilustração optamos pelo método numérico de Euler (para a função $xf(x)$, já que a taxa para as regras da Tabela 2 é a específica) e chegamos nas estimativas x_n:

$$x_{n+1} = x_n + hx_n f(x_n),$$

cuja representação gráfica pode ser vista na Figura 25.

As regras da Tabela 2 estão de acordo com as principais características de um modelo geral de população com crescimento inibido que seja regulado por

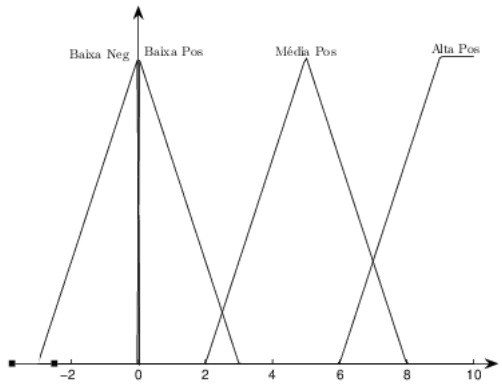


Figura 24: Funções de pertinência da variação específica $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$.

uma capacidade suporte. O modelo de Verhulst, estudado por nós acima, é um caso particular. Além desse, com pequenas modificações, a mesma base de regras poderia servir para os modelos inibidos de Gompertz, de Montroll, de von Bertalanffy, etc.

A seguir vamos fazer um breve estudo do modelo geral de Montroll e, supondo que a base de regras (Tabela 2) corresponda ao modelo de Verhulst, ilustrar uma maneira de "ajustar" tais regras a fim de levar em conta as particularidades do modelo de Montroll.

4.1.2 Estudo do Modelo p-fuzzy de Montroll

A maioria dos modelos autônomos contínuos de crescimento populacionais, formalizados a partir de equações diferenciais, têm a forma

$$\frac{dx}{dt} = xf(x).$$

A função f é denominada crescimento específico da população. Abaixo apresentamos algumas delas que são bastante usadas na literatura:

(a) Modelo de Verhulst: f é afim e dada por

$$f(x) = a\left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

(b) Modelo de Montroll:

$$f(x) = a\left(1 - \left(\frac{x}{K}\right)^s\right), \text{ com } s > 0.$$

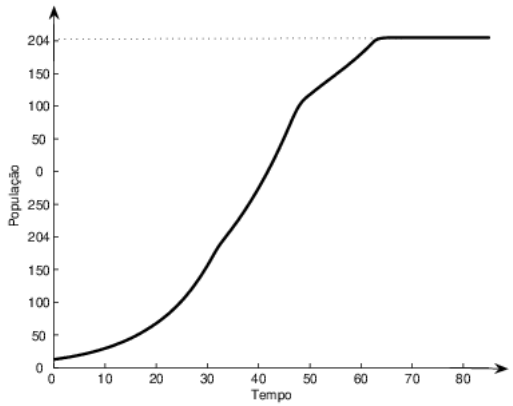


Figura 25: Trajetória do modelo p-fuzzy contínuo com $x_0 = 5$ referente a Tabela 2.

(c) Modelo de Gompertz:

$$f(x) = -a \ln \frac{x}{K}, x > 0.$$

A Figura 26 abaixo ilustra uma base de regras na forma granular e possibilidades para diversos crescimentos específicos (f) com inibição.

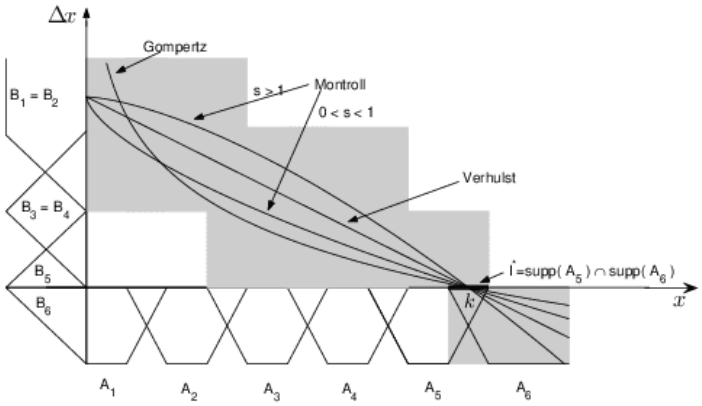


Figura 26: Grânulos e possibilidades de campos de diversos modelos de crescimento inibido; $\Delta x = \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$.

Embora os modelos comentados acima tenham uma forma geral para suas

R_1 : **Se** (X) é "baixa" (A_1) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "pouco alta positiva" (pB_1)
R_2 : **Se** (X) é "média baixa" (A_2) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "alta positiva" $(pB_2 = pB_1)$
R_3 : **Se** (X) é "média" (A_3) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "média positiva" (pB_3)
R_4 : **Se** (X) é "média alta" (A_4) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "média positiva" $(pB_4 = pB_3)$
R_5 : **Se** (X) é "alta" (A_5) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "baixa positiva" (mB_5)
R_6 : **Se** (X) é "altíssima" (A_6) **então** a $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é "baixa negativa" (mB_6)

Tabela 3: Regras para o modelo fuzzy de Montroll contínuo.

bases de regras, cada um deles tem sua particularidade. Aqui estamos interessado apenas no "ajuste" da base de regras da Tabela 2 para o modelo de Montroll.

Dependendo do parâmetro s no modelo de Montroll tem-se crescimento específico maior ou menor que o modelo de Verhulst (ver Figura 26).

- Se $s > 1$, o crescimento específico do modelo de Montroll é maior que o de Verhulst até a capacidade suporte. Depois desse valor, o modelo de Montroll cresce menos.
- Se $0 < s < 1$, tem-se inversão nos crescimento em relação ao parâmetro $s > 1$.

Essas particularidades sugerem as modificações que devem ser feitas na base de regras (Table 2), supondo que esta represente o de Verhulst, para chegarmos numa outra coerente com o modelo de Montroll.

Exemplo 11. A seguir faremos modificações no sentido de incorporar as particularidades do modelo de Montroll, supondo $0 < s < 1$:

Base de regras para o modelo de Montroll com $0 < s < 1$:

Os antecedentes das regras da Tabela 3 são os mesmos que os das regras do Quadro 2. Para modelar as modificações especificadas nas regras da Table 3, vamos utilizar o conceito de **modificador fuzzy**.

Para o caso específico que estamos tratando acima, vamos utilizar os modificadores do tipo potência, em que a potência é um parâmetro $0 < \gamma < 1$ ou seu inverso $\frac{1}{\gamma}$. Vamos aplicar os seguintes modificadores nos consequentes das regras da Tabela 2 para obter os das regras da Tabela 3,

$$\begin{cases} pB_i = (B_i)^\gamma \iff \varphi_{pB_i}(x) = (\varphi_{B_i}(x))^\gamma,\ i = 1, 2. \\ pB_i = \begin{cases} (B_i^-)^\gamma \iff \varphi_{pB_i^-}(x) = (\varphi_{B_i^-}(x))^\gamma \\ (B_i^+)^{\frac{1}{\gamma}} \iff \varphi_{pB_i^+}(x) = (\varphi_{B_i^+}(x))^{\frac{1}{\gamma}} \end{cases},\ i = 3, 4. \\ mB_i = (B_i)^{\frac{1}{\gamma}} \iff \varphi_{mB_i}(x) = (\varphi_{B_i}(x))^{\frac{1}{\gamma}},\ i = 5, 6. \end{cases}$$

onde B_i^- e B_i^+ são respectivamente o lado esquerdo e direito do conjunto fuzzy B_i.

A Figura 27 ilustra os consequentes das regras da Tabela 2 e da Tabela 3.

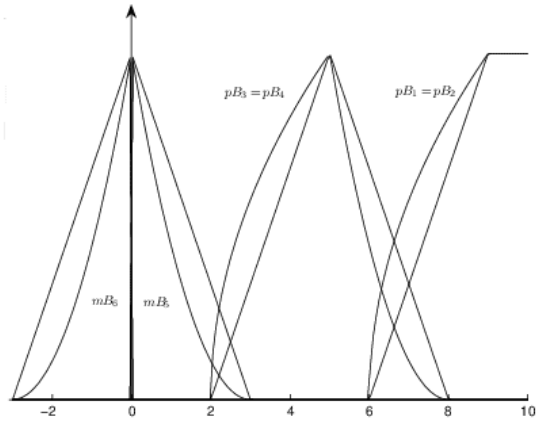


Figura 27: Consequentes das regras da Tabela 2 e suas respectivas modificações por potência.

Com essa nova base de regras obtemos uma trajetória para o modelo p-fuzzy de Montroll que pode ser visualizada na Figura 28.

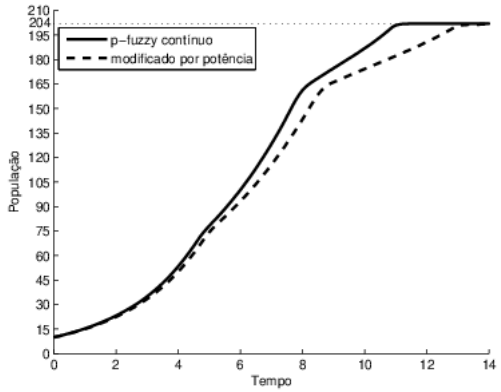


Figura 28: Trajetória dos modelos p-fuzzy contínuos para as regras do Quadro 2 e regras modificadas ($\gamma = 0,05$) conforme Tabela 3.

4.2 Modelo Presa-predador de Lotka-Volterra

Por volta de 1925, Lotka e Volterra desenvolveram um dos modelos matemáticos de mais largo uso e de destacada importância para representar interações entre presas e seus predadores. Tal modelo é conhecido como Modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra.

O modelo criado por Volterra foi bem aceito por explicar as alterações observadas nas populações de pescadas e tubarões no Mar Adriático, por ocasião da paralisação das atividades pesqueiras devido à I Guerra Mundial e posterior retomada, quando do término da guerra.

O modelo presa-predador clássico de Lotka-Volterra pressupõe que:

1. Tanto as presas como os predadores estão distribuídos uniformemente num mesmo habitat, ou seja, todos os predadores têm a mesma chance de encontrar cada presa;

2. O encontro entre os elementos das duas espécies seja ao acaso, a uma taxa proporcional ao tamanho das duas populações, já que quanto maior o número de presas, mais fácil será encontrá-las e quanto mais predadores, maior o número de ataques;

3. A população de presas cresce exponencialmente na ausência de predadores (crescimento ilimitado por escassez de predadores);

4. A população de predadores decresce exponencialmente na ausência de presas (decréscimo por escassez de alimento);

5. A população de predadores é favorecida pela abundância de presas;

6. A população de presas é desfavorecida pelo aumento de predadores.

Estas seis hipóteses são resumidas nas equações abaixo, denominadas Modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases} . \tag{16}$$

As variáveis de estado x e y são, respectivamente, quantidade de presas e quantidade de predadores em cada instante t.

Os parâmetros representam:

- a : taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores;

- $\frac{\alpha}{\beta}$: a eficiência de predação, isto é, a eficiência de conversão de uma unidade de massa de presas em uma unidade de massa de predadores, já que α representa a proporção de sucesso dos ataques dos predadores e β a taxa de conversão de biomassa das presas em predadores;

- b : taxa de mortalidade de predadores na ausência de presas;

Os pontos críticos do sistema (16) são: $(0, 0)$, um ponto de sela instável, e $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ que é um centro estável.

O caráter cíclico das soluções explica as flutuações observadas experimentalmente em população de presas e predadores.

4.2.1 Modelo Presa-predador p-fuzzy

Apresentamos anteriormente as hipóteses de Lotka-Volterra que caracterizam um modelo presa-predador, cujos contingentes populacionais oscilam com o tempo. Isso vem ao encontro de observações empíricas nestes ecossistemas. Os resultados, coerentes com o fenômeno estudado, fizeram com que o modelo de Lotka-Volterra, embora teórico, tenha se tornado um paradígma para os modelos do tipo presa-predador.

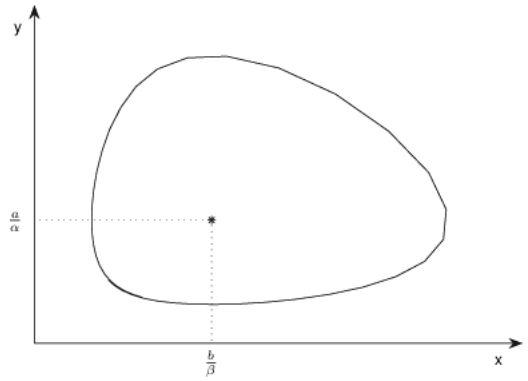


Figura 29: Plano de fase do modelo de Lotka-Volterra (16).

Procuramos modelar a principal característica de um sistema presa-predador, isto é, as presas favorecem o crescimento dos predadores e são desfavorecidas por eles. Como consequência, o plano de fase apresenta trajetórias que oscilam. Aqui queremos ir além disso. Pretendemos reproduzir, por meio de um sistema p-fuzzy bidimensional contínuo, um plano de fase semelhante ao do modelo contínuo de Lotka-Volterra, em que as trajetórias são ciclos (ver Figura 29). Para isto é necessário re-interpretarmos as seis hipóteses comentadas acima:

1. dentro de cada espécie, o ambiente não previlegia nenhum indivíduo. Portanto é natural que as variáveis de estado sejam apenas quantidades;

2. há interação entre as espécies;

3. não há auto-inibição nas presas, isto é, para um dado número de predadores, o crescimento específico das presas é constante, podendo ser positivo ou negativo;

4. como em “3.”, para um dado número de presas, o crescimento específico dos predadores seja constante, podendo ser positivo ou negativo;

5. o crescimento específico dos predadores aumenta com o número de presas;

6. o crescimento específico das presas diminui com o aumento dos predadores.

Resumidamente, as hipóteses de "3" a "6" indicam que, a interação é típica de presa-predador e que, mantendo-se uma espécie constante, a outra tem crescimento (decrescimento) malthusiano, isto é, tem crescimento específico constante.

Considerando as observações acima, temos como objetivo elaborar uma base de regras fuzzy que "substitua" as Equações (16), para modelar a dinâmica entre as presas e os predadores, por meio de um modelo p-fuzzy contínuo de Lotka-Volterra.

Como no caso unidimensional, temos as variáveis linguísticas de entrada: quantidade de presas (X) e quantidade de predadores (Y), e duas variáveis de saída: variação relativa da quantidade de presas por unidade de tempo, denotada por $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$, que é o crescimento específico das presas; e variação relativa da quantidade de predadores por unidade de tempo, denotada por $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ – crescimento específico dos predadores. A Figura 30 representa um esquema do modelo.

Figura 30: Sistema baseado em Regras Fuzzy para (16).

Os valores assumidos pela variável X são: *baixa* (A_1), *média baixa* (A_2), *média alta* (A_3) e *alta* (A_4) e pela variável Y são *baixa* (B_1), *média baixa* (B_2), *média alta* (B_3) e *alta* (B_4).

Ambos os crescimentos específicos, $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$, assumirão os valores *alto positivo* (P_2), *baixo positivo* (P_1), *baixo negativo* (N_1) e *alto negativo* (N_2). No esquema acima (Figura 30), a base de conhecimentos é traduzida por um conjunto de regras fuzzy que desempenham o papel do campo de direções.

A partir das seis reinterpretações para as hipótese de Lotka-Volterra feitas acima, principalmente a observação após a "6", propomos a base de regras fuzzy da Tabela 4.

Podemos representar graficamente a base de regras considerando que não deve haver variação nos crescimentos específicos, quanto às magnitudes e sentidos, de cada espécie quando mantemos a quantidade da outra constante (crescimento malthusiano para cada espécie, dada a outra espécie). Por exemplo, para uma quantidade fixa de predadores, a variação específica de presas deve ser constante

Se X é A_1 e Y é B_1 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é N_2
Se X é A_2 e Y é B_1 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é N_1
Se X é A_3 e Y é B_1 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é P_1
Se X é A_4 e Y é B_1 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é P_2
Se X é A_1 e Y é B_2 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é N_2
Se X é A_2 e Y é B_2 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é N_1
Se X é A_3 e Y é B_2 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é P_1
Se X é A_4 e Y é B_2 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é P_2
Se X é A_1 e Y é B_3 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é N_2
Se X é A_2 e Y é B_3 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é N_1
Se X é A_3 e Y é B_3 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é P_1
Se X é A_4 e Y é B_3 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é P_2
Se X é A_1 e Y é B_4 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é N_2
Se X é A_2 e Y é B_4 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é N_1
Se X é A_3 e Y é B_4 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é P_1
Se X é A_4 e Y é B_4 então $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$ é P_2

Tabela 4: Regras fuzzy para o modelo presa-predador.

(ver setas horizontais na Figura 31). Claro que outra base de regras poderia ser adotada, já que, as magnitudes envolvidas, tanto para as variáveis como para os crescimentos específicos, são incertas.

A Figura 31 ilustra a base de regras que está da Tabela 4. As setas horizontais representam as magnitudes e sentidos de $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$ e as verticais representam $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$.

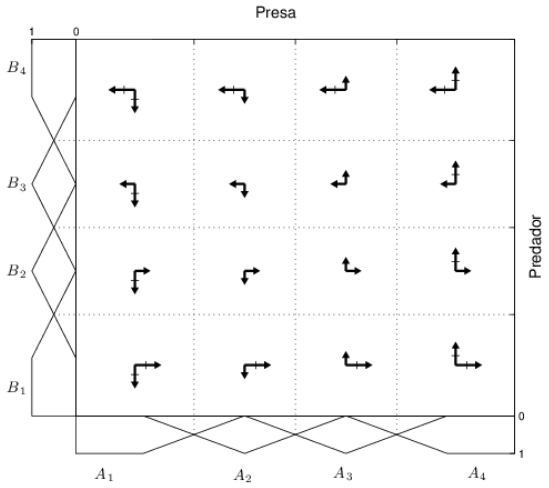


Figura 31: Representação gráfica das regras da Tabela 4 na forma de vetores de direções.

Nós apresentamos a Figura 31 para traçarmos um paralelo com a representação do campo de direções de equações diferencias clássicas. Apenas em título de curiosidade e para nos convencermos mais sobre o poder da metodologia p-fuzzy, a base de regras de fato "gera" um campo clássico de direções para uma E.D.O. A Figura 32 abaixo ilustra o campo produzido pela base de regras da Tabela 4.

As Figuras 33 e 34 representam as funções de pertinência de cada um dos valores fuzzy adotados em nosso exemplo.

Utilizando o Método de Inferência de Mamdani e a defuzzificação do Centro de Gravidade obtemos os valores $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}$ e $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dt}$.

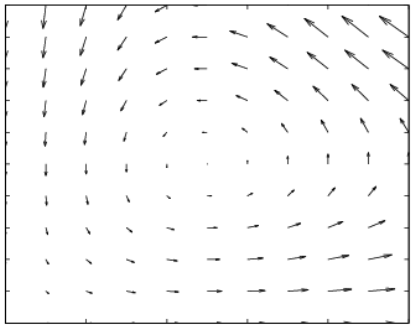
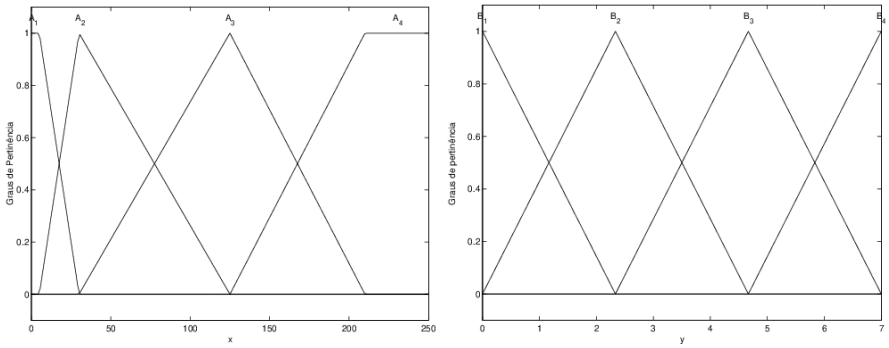
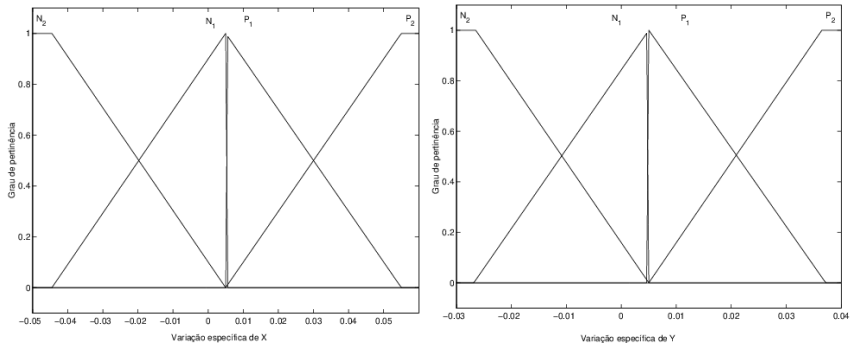


Figura 32: Representação gráfica do campo de direções gerados pelas regras da Tabela 4.



(a) Presas (X) (b) Predadores (Y)

Figura 33: Funções de pertinência dos antecedentes.



(a) Variações das presas $\left(\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}\right)$ (b) Variações dos predadores $\left(\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}\right)$

Figura 34: Funções de pertinência dos consequentes.

Em cada instante t, o número de presas e de predadores é dado pelas fórmulas

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt}(s)\, ds \\ y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{dy}{dt}(s)\, ds \end{cases} . \tag{17}$$

Como as saídas são $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$ e $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$, devemos multiplicá-las pelas entradas x e y, respectivamente, para obter $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$. Porém, as expressões analíticas de cada uma dessas derivadas não são conhecidas.

Para estimar as trajetórias dadas por (17), aproximamos $\frac{dx}{dt}(s)$ por $\frac{dx}{dt}(t_{i-1})$ em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, de modo que a integral $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{dx}{dt}(s)\, ds$ é aproximada por $(t_i - t_{i-1})\frac{dx}{dt}(t_{i-1})$.

Assim, os valores de $x(t)$ e $y(t)$ são estimados pelas fórmulas

$$\begin{cases} x(t_i) = x(t_{i-1}) + hx'_{i-1} \\ y(t_i) = y(t_{i-1}) + hy'_{i-1} \end{cases} , \tag{18}$$

onde $t_i = t_0 + ih$ enquanto x' e y' são as saídas do controlador corrrespondentes às entradas $x_{i-1} \approx x(t_{i-1})$ e $y_{i-1} \approx y(t_{i-1})$, respectivamente.

Resultados:

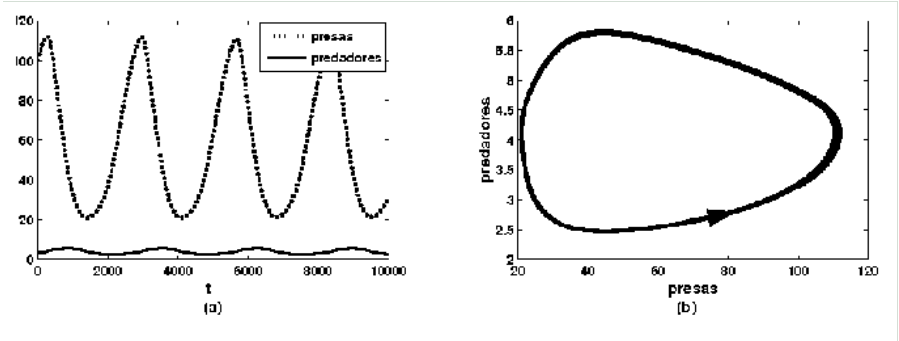


Figura 35: (a) Evolução dos contingentes populacionais ao longo do tempo; (b) Plano de fase do sistema p-fuzzy para $x_0 = 100$ e $y_0 = 3$.

As simulações das trajetórias produzidas pelo sistema p-fuzzy acima seguem os passos:

- Para começar o processo, adotamos os valores $x_0 = 100$, $y_0 = 3$, $h = 0,1$ e $t_0 = 0$.
- Dados iniciais para o controlador fuzzy: a população de presas x_0 e a de predadores y_0;
- As saídas fornecidos pelo controlador fuzzy, multiplicadas pelas entradas, fornecem os valores: x_0' e y_0';
- Por (18), encontramos x_1 e y_1;
- x_1 e y_1 são os novos valores de entrada do controlador e assim sucessivamente;

Usando as Equações (18), obtemos o plano de fase e as trajetórias ilustradas na Figura 35.

Com os dados iniciais adotados acima e o sistema p-fuzzy dado pelas regras da Tabela 4, combinadas com o sistema (18), é possível concluir que o ponto de equilíbrio é $P_e = (77,5; 3,5)$. Claro que outros métodos numéricos, como os de Runge-Kutta, podem ser adotados para estimar $x(t)$ e $y(t)$.

Se estivéssemos interessados em encontrar os parâmetros de um modelo de Lotka-Volterra clássico para produzir as trajetórias representadas na Figura 29,

poderíamos comparar as coordenadas de P_e com as do equilíbrio teórico, $P = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$, para obter relações entre a, b, α e β. Daí, usar ajustes para, finalmente encontrar cada um desses parâmetros.

Um dos primeiros trabalhos que se utilizaram dos sistemas p-fuzzy contínuos que descreve interações entre pulgões e joaninhas no controle biológico de uma doença chamada Morte Súbita dos Citros. O pulgão, supostamente hospedeiro do vírus causador da morte súbita, é a presa e a Joaninha, que se alimenta do pulgão, é o predador. Neste sistema presa-predador o modelo p-fuzzy pressupõe inibição em ambas populações. Portanto as regras devem levar isso em conta, de maneira que as trajetórias deixam de apresentar um caráter cíclico para apresentar ciclos limites. Tal modelo p-fuzzy apresenta propriedades qualitativas coincidentes com as do modelo clássico de Holling–Tanner. A partir daí, um estudo a respeito da estabilidade e ajustes de parâmetros desse modelo é feito.

Um aspecto importante dos sistemas p-fuzzy explorado nesse trabalho é a facilidade em lidar com possíveis heterogeneidades nas populações. Por exemplo, para o caso específico da morte súbita, os predadores apresentam vários níveis de predação, dependendo de seu estágio: larval e adulto. Neste caso, para variáveis de estado, pelo número de pulgões e pontencial de predação, que leva em conta não só o número de predadores, mas também a qualidade dos mesmos.

4.3 Modelo de reação química

Reações químicas são dadas basicamente por transformações que envolvem uma ou mais substâncias (reagentes) que resultam em uma nova substância (produto) com diferentes propriedades que as anteriores.

A cinética química trata e interpreta experimentos químicos em termos de modelos matemáticos. Em particular, ela estuda os fatores que influenciam o produto final, como por exemplo, concentração, temperatura e pressão. A velocidade de uma reação pode ser calculada a partir das concentrações dos reagentes, que podem ser determinadas experimentalmente.

Nessa aplicação focaremos em um modelo de reação química consecutiva, isto é, reações químicas da seguinte forma

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C, \quad \text{com taxas de reações } k_1 \text{ e } k_2. \tag{19}$$

Esse processo químico pode ser descrito pelo seguinte PVI

$$\begin{cases} \dfrac{d[A]}{dt} = -k_1[A], & [A(0)] = [A_0] \\ \dfrac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B], & [B(0)] = [B_0] \\ \dfrac{d[C]}{dt} = k_2[B], & [C(0)] = [C_0] \end{cases}, \tag{20}$$

em que $[X]$ representa a concentração do reagente X.

A partir de ferramentas de equações diferenciais, o PVI 20 pode ser resolvido analiticamente, sendo a solução dada por

$$\begin{aligned} [A(t)] &= [A_0]e^{-k_1 t}, \\ \big[B(t)\big] &= [B_0]e^{-k_2 t} + k_1[A_0]\frac{e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}}{k_2 - k_1} \\ \big[C(t)\big] &= [C_0] + [B_0](1 - e^{-k_2 t}) + [A_0]\left(1 + \frac{k_1 e^{-k_2 t} - k_2 e^{-k_1 t}}{k_2 - k_1}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Alternativamente podemos aproximar tais soluções por meio de um sistema p-fuzzy dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = \text{FRBS}_{F_1} & A(0) = [A_0] \\ \dfrac{dB}{dt} = \text{FRBS}_{F_2} & B(0) = [B_0] \\ \dfrac{dC}{dt} = \text{FRBS}_{F_3} & C(0) = [C_0] \end{cases}. \tag{22}$$

As variáveis de entrada serão modeladas através de 4 classificações linguísticas:

1. "*baixo*" (A_1 e B_1),
2. "*médio baixo*" (A_2 e B_2),
3. "*médio alto*" (A_3 e B_3) e
4. "*alto*" (A_4 e B_4).

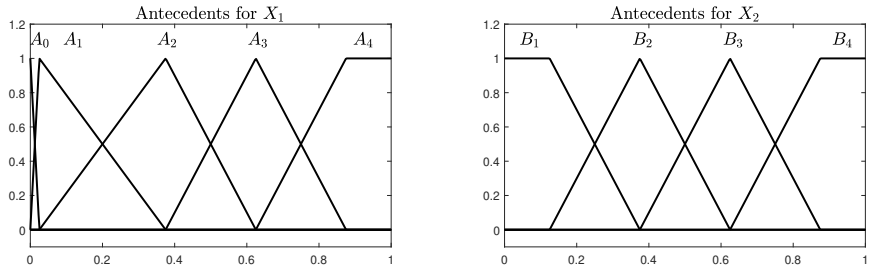


Figura 36: Antecedentes do sistema baseado em regras fuzzy para o modelo de reações químicas consecutivas.

Por outro lado, as variáveis de saída (taxas de variações) são modeladas por:

1. "*negativo alto*" (N_3),
2. "*negativo médio*" (N_2),
3. "*negativo baixo*" (N_1),
4. "*positivo baixo*" (P_1),
5. "*positivo médio*" (P_2), e
6. "*positivo alto*" (P_3).

A base de regras fuzzy elaborada para essa aplicação foi baseada nas equações diferenciais associada ao modelo (22). A Figura 38 ilustra a base de regras fuzzy, em que as setas representam as direções e magnitudes para as taxas de variação, isto é, as setas para direita/cima (esquerda/baixo) indicam a variação positiva (negativa) e o tamanho da seta indica a magnitude dessas variações.

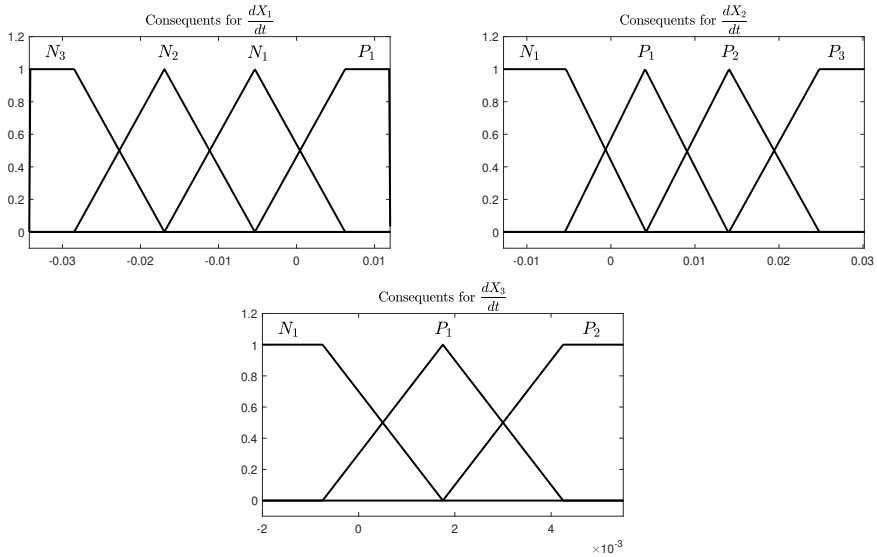


Figura 37: Consequentes do sistema baseado em regras fuzzy para o modelo de reações químicas consecutivas.

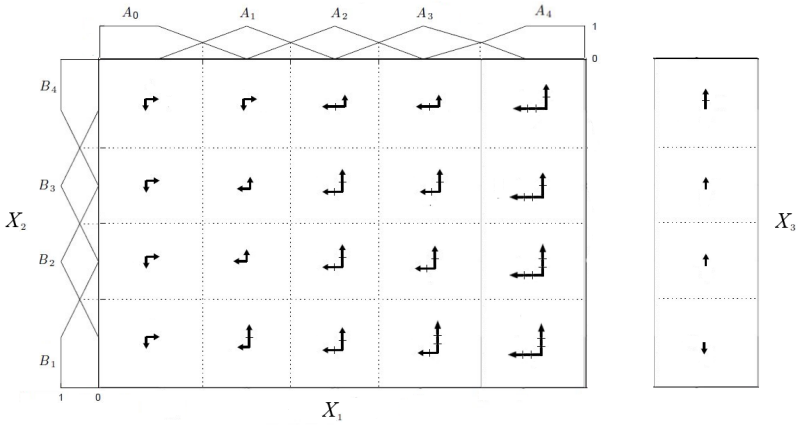


Figura 38: Representação gráfica das regras fuzzy baseada no campo de direções do modelo de reações químicas consecutivas. As setas representam as direções e magnitudes das taxas de variação.

Uma vez definida a base de regras, utilizamos os métodos de Mamdani (como inferência) e o centróide (como defuzzificador). A Figura 39 ilustra o esquema desse SBRF.

Utilizando então o método de Euler, o sistema p-fuzzy produz as soluções aproximadas do modelo químico (20), que pode ser vista na Figura 40 utilizando

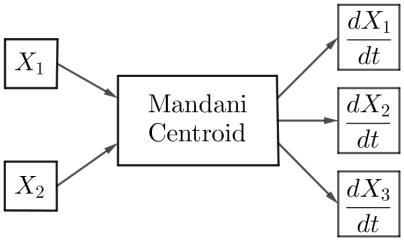


Figura 39: Sistema Baseado em Regras Fuzzy para o modelo de reações químicas consecutivas.

como condições iniciais $[A_0] = 1, [B_0] = 0$ e $[C_0] = 0$. Como pode ser visto, as soluções produzidas pelo sistema p-fuzzy são qualitativamente e quantitativamente similares a solução clássica do problema.

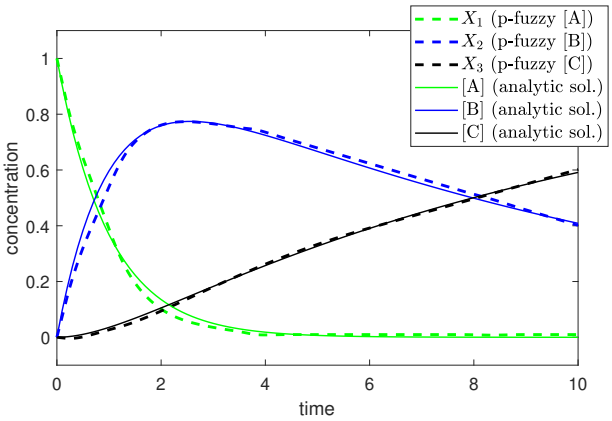


Figura 40: Soluções analítica e via p-fuzzy do PVI dado em (20) com $[A_0] = 1, [B_0] = 0$ e $[C_0] = 0$.

4.4 Modelo econômico de Goodwin

O ciclo de crescimento de Goodwin (ou modelo de Goodwin) é considerado a maior contribuição do economista norte-americano Richard Goodwin. Este autor foi um dos pioneiros no uso de modelagem matemática para o estudo da dinâmica econômica, enfatizando a natureza não linear e não estacionária dos processos econômicos [7].

Em termos gerais, o modelo expressa uma formalização matemática para o processo descrito por Karl Marx no capítulo 23, "A lei geral da acumulação capitalista", do livro *O Capital*. Tal modelo consiste em um par de equações diferenciais ordinárias que descrevem a interação dinâmica entre os níveis de emprego (v) e a distribuição funcional da renda de uma economia, expressa pela parcela salarial (u), em um contexto de crescimento econômico [12].

Na sua formulação original, o modelo de Goodwin coincide com o sistema de equações diferenciais de Lotka-Volterra, que é um modelo biomatemático amplamente conhecido, o qual descreve a interação trófica entre duas populações: uma de presas e outra de predadores [6].

Conceitualmente o modelo econômico é concebido por Goodwin da seguinte maneira: se os salários aumentam, os lucros caem. A queda nos lucros implica em redução da poupança e do investimento detendo a criação de novos empregos. Entretanto a força de trabalho cresce, tanto pela incorporação de novos contingentes de trabalhadores como pela liberação de trabalhadores decorrente do progresso técnico. Desta forma os salários se defasam em relação ao crescimento da produtividade e os lucros crescem. A acumulação acelera novamente. Assim o desemprego se reduz gradualmente conduzindo a um aumento de salários o que reinicia o processo e caracteriza a natureza cíclica do modelo [11].

O modelo de Goodwin estrutura-se a partir de sete premissas [11]:

1) Progresso técnico constante (desincorporado);

2) Crescimento constante da força de trabalho;

3) Somente são empregados dois fatores de produção (trabalho e capital) ambos homogêneos e não específicos;

4) Todas as quantidades são reais e líquidas;

5) Todos os salários são consumidos, e todos os lucros são poupados e reinvestidos;

6) A razão capital produto é constante;

7) A taxa de salário real é crescente na vizinhança do pleno emprego.

Segundo Goodwin [7], as premissas 1 a 5 são efetuadas por conveniência, enquanto as duas últimas são de caráter empírico. Cabe enfatizar que o modelo original desconsidera questões de insuficiência da demanda, e considera todos os valores como líquidos (sem depreciação) e reais (sem questões monetárias). Ao mesmo tempo Goodwin [7], assume constância da produtividade do capital, o que implica no fato de que o progresso técnico da economia tem natureza Harrod-neutro, ou seja, é poupador de trabalho. Ainda é considerado que a produtividade do trabalho e o contingente dos trabalhadores crescem a taxas constantes. Cada uma das premissas descritas caracterizam os parâmetros do sistema de equações [11, 12].

Desta forma, o modelo Goodwin consiste em duas equações diferenciais ordinárias no tempo, uma para a taxa de emprego (v) e uma para o a parcela salarial (u) [4]. A equação dinâmica para v é dada por:

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = \left(\frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta\right) - \frac{1}{\sigma}u, \tag{23}$$

onde α é a taxa de crescimento exógeno na produtividade do trabalho (progresso técnico), β a taxa de crescimento exógeno da população (força de trabalho) e σ a relação capital-produto (que é o inverso da produtividade do capital).

Para obter a equação dinâmica para u, Goodwin [7] usou uma aproximação linear da taxa específica de dinâmica do salario real $\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} \approx (-\gamma + \rho v)$, afirmando que esta aproximação é satisfatória para movimentos moderados do nível de emprego próximos ao pleno emprego ($v \approx 1$). Desta forma, definindo a parcela do trabalho na renda nacional como a proporção entre o salário real e o produto médio por trabalhador, isto é $u = \frac{\omega}{a}$, e tomando a taxa específica de crescimento da produtividade do trabalho $\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \alpha$ (uma constante Harrod-neutro), obtemos a equação dinâmica para u dada por:

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dt} = -\left(\gamma + \alpha\right) + \rho\, v. \tag{24}$$

As equações (23) e (24) representam o chamado Modelo de Goodwin. Tal modelo apresenta nítida semelhança com o modelo de Lotka-Volterra [6]. O ponto de equilíbrio não trivial do modelo de Goodwin é dado pelos valores

$$v^* = \frac{(\gamma + \alpha)}{\rho} \;\text{ e }\; u^* = 1 - (\alpha + \beta)\,\sigma. \tag{25}$$

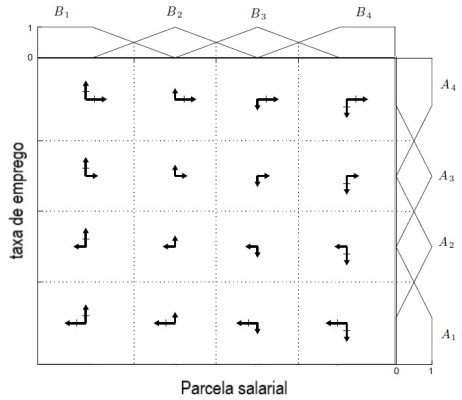
Os valores de v^* e u^* são considerados como médias das trajetórias de v e u, as quais oscilam em ciclos de crescimento e decrescimento segundo a dinâmica temporal de interação entre tais variáveis [11]. Usualmente, um ciclo completo do modelo de Goodwin pode ser visualizado, em um plano uv, indicando um sentido horário da dinâmica temporal das variáveis. Isto se deve ao fato de que a variável associada aos capitalistas "v" (que correspondem as presas) é posicionada no eixo das ordenadas e a variável associada aos trabalhadores "u" (que correspondem aos predadores) localiza-se no eixo das abcissas.

O modelo de Goodwin, dado por (23) e (24), é baseado nas 7 premissas enunciadas na seção 3. Tais equações apresentam a seguinte propriedade:

"*dado o valor de uma variável, a taxa específica da outra é constante*" (26)

Como (26) é baseada nas 7 premissas, o modelo *p*-fuzzy também será. Por exemplo, para cada v fixado em (24), a taxa específica $\frac{1}{u}\frac{du}{dt}$ é constante.

Cada uma das variáveis de entrada V e U é classificada nos subconjuntos fuzzy *baixo* (A_1 e B_1), *médio baixo* (A_2 e B_2), *médio alto* (A_3 e B_3) e *alto* (A_4 e B_4). Enquanto as variáveis de saída (variação específica de cada variável) assumem os termos *negativa* (N_2), *negativa baixa* (N_1), *positiva baixa* (P_1) e *positiva* (P_2). Assim, levando em conta a propriedade (26) e os antecedentes de entrada combinados com os consequentes das saídas, obtemos uma base de regras fuzzy cuja representação gráfica, com sentido e magnitude das regras, está na Figura 41.



R_1: Se V é A_1 e U é B_1 então $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}$ é N_2.
R_2: Se V é A_2 e U é B_1 então $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$ é P_2 e $\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}$ é N_1.
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
R_8: Se V é A_4 e U é B_2 então $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$ é P_1 e $\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}$ é P_2.
R_9: Se V é A_1 e U é B_3 então $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$ é N_1 e $\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}$ é N_2.
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
R_{15}: Se V é A_3 e U é B_4 então $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}$ é P_1.
R_{16}: Se V é A_4 e U é B_4 então $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$ é N_2 e $\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}$ é P_2.

Figura 41: a) Representação gráfica da base de regras na forma de vetores de direções e b) algumas regras fuzzy usadas para o modelo de Goodwin.

Nas simulações computacionais foram estabelecidas duas variáveis linguísticas de entrada (V e U) e duas de saída ($\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$ e $\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}$). Uma vez estabelecida a base

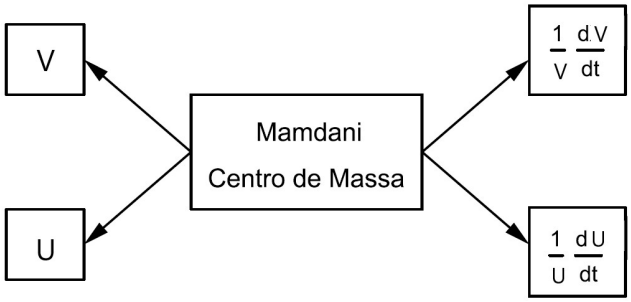


Figura 42: Sistema Baseado em Regras Fuzzy para o Modelo de Goodwin *p*-fuzzy.

de regras, nosso modelo utilizará o método de Mamdani (como módulo de inferência) e o centro de massa (como módulo de defuzzificação). A Figura 42 representa um esquema do modelo.

No módulo de fuzzificação, cada variável linguística (V e U) foi configurada a partir de 4 termos linguísticos (4 números fuzzy que representam *baixo*, *médio baixo*, *médio alto* e *alto*) para cada antecedente, respectivamente, e por 4 termos linguísticos (4 números fuzzy que representam *negativa*, *negativa baixa*, *positiva baixa* e *positiva*) para os consequentes, como visualizado na Figura 43.

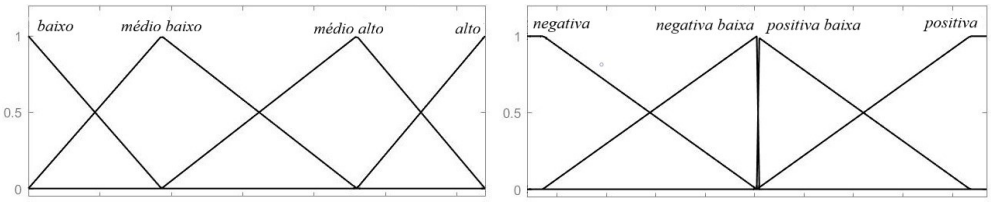


Figura 43: Estrutura dos números fuzzy a) nos antecedentes e b) nos consequentes.

Consideremos o sistema *p*-fuzzy para simular o comportamento dinâmico das variáveis u e v para as economias da Finlândia e do Brasil. Além disso, comparamos a solução obtida com séries de dados econômicos históricos para Finlândia (de [8]) e para Alemanha [15].

Os diagramas de fase da solução *p*-fuzzy (para u e v) e dos dados econômicos históricos da Finlândia (de 1960 até 1994) são apresentados na Figura 44 e, na Figura 45, para Alemanha (de 1956 até 1994).

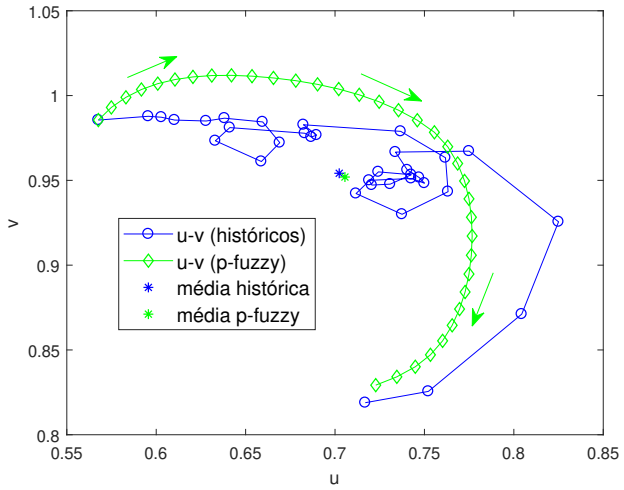


Figura 44: Modelos de Goodwin histórico e solução *p*-fuzzy para dados econômicos da Finlândia entre 1960 e 1994.

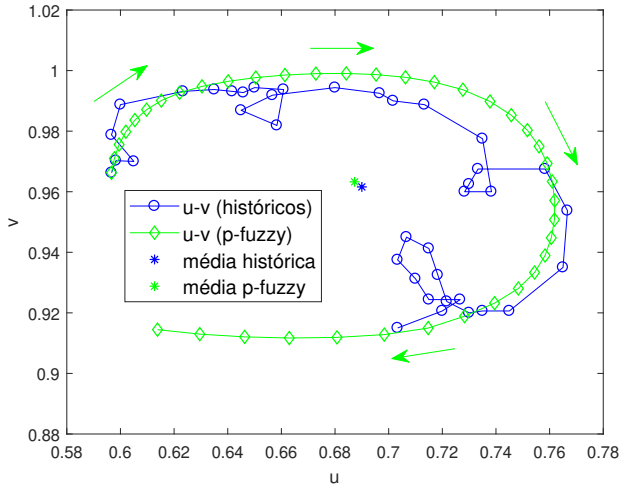


Figura 45: Modelos de Goodwin histórico e solução *p*-fuzzy para dados econômicos da Alemanha entre 1956 e 1994.

5 Considerações Finais

Este minicurso traz uma abordagem para tratar de equações diferenciais em que se tem um conhecimento parcial do campo de direções. O campo é aproxi-

mado por um sistema de base de regras fuzzy, que juntamente com um método numérico (o de Euler, por exemplo) fornecem a saída que descreve o comportamento da solução clássica do problema.

Esse texto traz um panorama geral dos conceitos básicos necessários para o compreendimento do estudo de sistemas p-fuzzy. Além disso, traz aplicações na área de Biomatemática, bem como nas áreas de economia e química.

Essa abordagem é ideal para aqueles que não possuem um conhecimento vasto em equações diferenciais, mas mesmo sabendo o comportamento qualitativo do campo de direções pode obter a solução aproximada do problema.

Referências

[1] BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C., AND LODWICK, W. A. *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*, 1 ed. 347. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2017.

[2] BEDE, B. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, 1 ed. 295. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2013.

[3] BOYCE, W. E., AND DIPRIMA, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, 2009.

[4] DESAI, M., HENRY, B., MOSLEY, A., AND PEMBERTON, M. A clarification of the goodwin model of the growth cycle. *Journal of Economic Dynamics and Control 30*, 12 (2006), 2661–2670.

[5] DIAMOND, P., AND KLOEDEN, P. *Metric Topology of Fuzzy Numbers and Fuzzy Analysis*. Springer US, Boston, MA, 2000.

[6] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models in biology*. SIAM, 2005.

[7] GOODWIN, R. M. A growth cycle. In *Essays in economic dynamics*. Springer, 1982, pp. 165–170.

[8] HARVIE, D. Testing goodwin: growth cycles in ten oecd countries. *Cambridge Journal of Economics 24*, 3 (2000), 349–376.

[9] KLEMENT, E. P., MESIAR, R., AND PAP, E. *Triangular Norms*, 1 ed. 8. Springer Netherlands, Netherlands, 2000.

[10] KLIR, G. J., AND YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.

[11] MIEBACH, A. D. O ciclo de crescimento de goodwin: um modelo de dinâmica econômica não linear. Master's thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2011.

[12] MIEBACH, A. D., ET AL. O ciclo de crescimento de goodwin e a parcela salarial na economia brasileira.

[13] NGUYEN, H. T., AND WALKER, E. A. *A First Course in Fuzzy Logic*, 3 ed. Chapman & Hall/CRC, New Mexico, 2005.

[14] PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. John Wiley & Sons, Nova Jersey, 2007.

[15] SANCHEZ, D., BARROS, L. C., ESMI, E., AND MIEBACH, A. D. *Goodwin model via ¡italic¿p¡/italic¿-fuzzy system*. pp. 977–984.

[16] SÁNCHEZ, D. E., ESMI, E., AND DE BARROS, L. C. Discrete and continuous logistic p-fuzzy models. In *Fuzzy Techniques: Theory and Applications* (Cham, 2019), R. B. Kearfott, I. Batyrshin, M. Reformat, M. Ceberio, and V. Kreinovich, Eds., Springer International Publishing, pp. 556–566.

[17] SÁNCHEZ, D. E., WASQUES, V. F., ESMI, E., AND BARROS, L. C. Consecutive chemical reactions models via p-fuzzy systems. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics* (2019), pp. 1 – 7.

[18] SILVA, J. D. M. *Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos p-Fuzzy com Aplicações em Biomatemática*. PhD thesis, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2005.

[19] ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control 8*, 3 (1965), 338 – 353.